现代应用数学丛书

平面弹性论

〔日〕森口繁一 著

上海科学技术出版社

统一书号 13119·463
定 价 0.50 元

现代应用数学丛书

平面彈性論

〔日〕森口繁一 著
刘 亦 珩 譯
王 开 福 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，系統地探討了利用复应力函数理論求平面彈性問題的一般解的方法，并收集了其他学者在这方面的成就，列出它們之間的关系，使讀者有一个全面的了解。

全书計分基本方程，复应力函数一般理論，应力函数的表达式，复参数的应用，反照原理等五章，可供数学和力学工作者参考。

現代应用数学丛书

平 面 彈 性 論

原书名 2次元彈性論
原著者 〔日〕森口繁一
原出版者 岩波书店
譯者 刘亦珩
校者 王开福

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

开本850×1168 1/32 印張2 26/32 字数64,000
1962年6月第1版 1962年6月第1次印刷
印数1—7,000

統一书号：13119·464
定 价：（十四）0.50元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

彈性静力学是偏微分方程边界値問題的一种。它除了研究已知問題解的存在性及唯一性之外，在实用上更重要的是要求出解的数値。因此，对所謂"一般性解"，特别关于平面問題，很多学者发表了不少文献。但通观这些一般解法使我們感覺到：第一，由于符号及其表示法的不同，使得一些实质上相同的东西，从形式上看来好象有所不同，同时使一些密切相关的东西在形式上看来也好象变得相互无关。第二，在利用級数和积分形式表示問題的解时，并沒有将为什么可以利用它們的理由和根据交代清楚。因此人們在处理新問題时仍然盲目摸索，而且还会錯誤地使用公式。

本书将論述一种复应力函数的方法，并且說明以前各种表达式与本书表达式之間的关系，又注意解的表达式与收斂区域的关系，尽量使这种表达式自然地被推导出来。应力函数的多値性通常容易使人迷惑，但本书一开始就考虑到"位錯"，并且給予一般的处理，这样就能避免导出錯誤的結果。

在此所采用公式的形式，引自 I. S. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill (1956), Chap. 5 和 N. I. Muskhelishvili 等人的工作，但在本稿全部結构上，作者还作了一番推敲，特别是第 5 章反照原理的应用，乃是作者自己的工作，对于簡单的問題，单用它就可以解决；而对于复杂問題，在求解时亦相当有用。

S. M. 1956年12月3日

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·測度*	河田敬义	賴英华
泛函分析	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論	岩堀長庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占藻
数值計算法	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論	古屋茂	呂紹明
力学系統与映象理論	岩四义一	孙澤瀛
平面彈性論	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論	山本善之	刘亦珩
变形几何学*	近藤一夫	
塑性論*	鷲津久一郎	刘亦珩
粘性流体理論	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	賈弃啓
自动控制論	喜安善市等	翟立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
实驗設計	増山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論	木村資生	刘祖洞
博奕論	宮澤光一	張鎭春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已在1961年出版。

目　录

第1章 基本方程

§1 弹性理論的平面应力問題和平面应变問題

各向同性彈性体的应力分量 σ_x, σ_y, σ_z; τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} 和应变分量 ε_x, ε_y, ε_z; γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} 間存在有广义 Hooke 定律

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z), & \gamma_{yz}&=\frac{1}{G}\tau_{yz},\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_z-\nu\sigma_x), & \gamma_{zx}&=\frac{1}{G}\tau_{zx},\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}(\sigma_z-\nu\sigma_x-\nu\sigma_y), & \gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}.\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

式中 E 是 Young 彈性模量，ν 是 Poisson 比，G 是剪切彈性模量，其間存在着关系式

$$E=2G(1+\nu),\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}.\tag{1.2}$$

設在某点的一个主方向重合于 z 軸方向，因而 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$, $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$。如果再加上另外一个条件，即可有如下两类問題：

1. 平面应力問題 当 z 方向的主应力为 0，即 $\sigma_z=0$ 时，則称为平面应力問題。代入(1.1)，得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy},\tag{1.3}$$

这是主要的，另外一个

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\tag{1.4}$$

并不重要。

2. 平面应变問題 当 z 方向的主应变为 0，即 $\varepsilon_z=0$ 时，則

称为平面应变問題。代入(1.1)中 ε_z 的表达式,即得

$$\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y). \tag{1.5}$$

将此代入(1.1)中 ε_x 的表达式,則得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\{\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu^2(\sigma_x+\sigma_y)\}=\frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_x-(\nu+\nu^2)\sigma_y\}$$

$$=\frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right). \tag{1.6}$$

在此若設

$$E'=\frac{E}{1-\nu^2},\quad \nu'=\frac{\nu}{1-\nu}\quad \left(\frac{1}{\nu'}=\frac{1}{\nu}-1\right), \tag{1.7}$$

則(1.6)与(1.3)第一式的形式相同。同理 ε_y 也变成与(1.3)第二式的形式相同。最后得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E'}(\sigma_x-\nu'\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E'}(\sigma_y-\nu'\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}. \tag{1.8}$$

在此若注意到

$$\frac{E'}{2(1+\nu')}=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{2\left(1+\frac{\nu}{1-\nu}\right)}=\frac{E}{2(1+\nu)}=G, \tag{1.9}$$

則易知(1.8)和(1.3)的性质是完全相同的。

以上仅就一点論述了平面应力問題和平面应变問題，下面进一步来考虑在所有点都具有这种性质的情形。例如对柱体取母綫方向为 z 軸，同时具有如下的边界条件：第一，柱体側面上的边界条件沿长度方向不变；第二，在其两端面上作用着按(1.5)給定的面力，則其所有点的应变可近似的看作平面 (x,y) 上点的平面应变状态。（若柱体很长时，即使第二条件不能成立，但除端面附近以外，仍然近似地具有平面应变状态。）对于管状柱体也具有同样的性质。

又如把薄板厚度的方向取作 z 軸，現在研究它所有的点都在平行于 (x,y) 平面上发生平面应力状态的情形。自然，为了这样

必須选擇特别的边界条件❶。但是，在实际問題中一般不能出現这样的边界条件，只有板本身很薄，且在面內受有載荷时，才能近似地实現这种状态。

当彈性体的所有点都处于平面应变或平面应力状态时，則其应变分量和应力分量可看成仅含(x, y)的函数。現以σ_x，σ_y，τ_{xy}作为应力分量，而以ε_x，ε_y，γ_{xy}作为应变分量。应力和应变間的关系式是(1.3)或(1.8)。平面彈性理論就专門处理这样的問題。(1.8)与(1.3)形状相同，所以今后将专就平面应力問題导出公式，而对于平面应变問題的討論，只須将E及ν分别以E'及ν'代之就可以了(参照(1.7))。并且在引用其他文献的公式时，也都是将平面应变問題的公式改写成平面应力問題的公式(今后将不再一一說明)。

[注 1] 对于在長柱体中部具有平面应变状态，或在薄板上具有平面应力状态等等，都是近似的說法。关于这方面的精辟討論直到目前还未見到有人作过。“广义平面应力”这个概念也可理解为薄板的近似情形。Filton [Phil. Trans. Roy. Soc., **A201**(1903), 67]所举的例，其实也不过是普通平面应力問題，只是論述奇妙些而已。Southwell [Phil. Mag. **21**(1936), 201]的討論比較深入，但是对于漸近应力状态，似乎沒有得到这样的結論：即它不是平面应力，而可作为广义平面应力来考慮。

[注 2] 有时将平面应变問題广义地解釋为滿足条件$\varepsilon_z=c$(c是常数但不必为0)的問題，但这可看作上述平面应变問題($\varepsilon_z=0$)再重迭上沿z方向的一个均匀伸縮($\varepsilon_z=c$)。

[注 3] 关于一点的平面应变問題或平面应力問題的定义，可参看Love: Math. Theory of Elasticity 4th ed. (1927), p. 45, 82.

[注 4] 有时用Poisson数$m=1/\nu$代替Poisson比。这样，将平面应变問題的公式写成平面应力問題的形状时，其Poisson数$m'=1/\nu'$等于$m-1$，这是便于記忆的。

❶ 如在薄板的上下两面不受外力，而只在側面上受有沿板厚度方向均匀的与上下两面平行的力作用。——校者注

Lamé 常数 λ, μ 和 E, ν 或 G, m 間有如下的关系：

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\frac{2G}{m-2},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G; \tag{1.10}$$

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\frac{1}{m},\quad G=\mu. \tag{1.11}$$

对于鉄，$E=2\times10^4\ \mathrm{kg/mm^2}$，鋁 $E=7\times10^3\ \mathrm{kg/mm^2}$。至于 ν 通常近似的取作 0.3。

［注5］ 等价 Young 模量 $E'=\frac{E}{1-\nu^2}$ 在板弯曲及曲屈問題內时常遇到。为了不允許横向变形，因此从外表上来分析，等价 Young 弹性模量，必須有較大的量。

§2 平衡方程和Airy 应力函数

彈性体的应力与体积力的平衡方程，一般写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0,\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0,\\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中 X, Y, Z 是单位体积力的分量。在平面問題里，与 z 有关的項都消失，而变成

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0 \tag{2.2}$$

((2.1)的第三式沒有意义)。若不考虑体积力，則有

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0。 \tag{2.3}$$

这两个式子以后作为“平衡方程”，将經常引用。

由于(2.3)的第一式是 $\sigma_x dy-\tau_{xy}dx$ 成为完全微分的充要条件，即有

$$\phi(x, y)=\int_A^P(\sigma_x dy-\tau_{xy}dx) \tag{2.4}$$

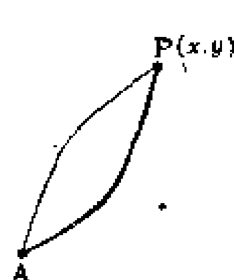


图 2.1

若始点 A 固定，終点 P 坐标为 (x, y)，則 $\phi(x, y)$ 的值与由 A 到 P 的路綫无关，并恒可唯一决定，于是有

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{2.5}$$

現在考虑綫积分 (2.4) 的物理意义。任取一条从 A 到 P 的路綫，并設对于它的微小部分（长度为 ds）从路綫右侧施于左侧的力的 x 分量为 $p_x\,ds$❶（以后对于 z 方向恒假定具有单位厚度）。由图2.2知

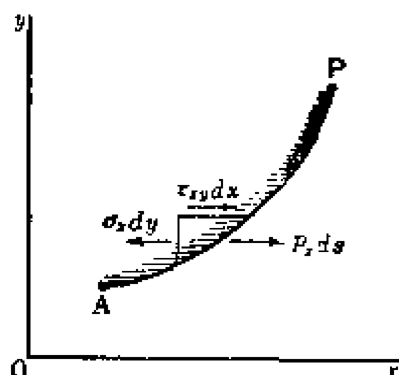


图 2.2

$$p_x ds = \sigma_x dy - \tau_{xy} dx, \tag{2.6}$$

所以(2.4)可写成

$$\phi(x, y) = \int_A^P p_x ds. \tag{2.7}$$

即 $\phi(x,y)$ 等于"由 A 到 P 的任意路綫，从右侧施于左侧各力的合力的 x 分量"。此值与自 A 到 P 的路綫选择无关。事实上，可按图 2.3 作出两路綫所包圍的部分而考虑之即可理解（因为对于路綫(1)从右侧施于左侧的力，与对于路綫(2)从左侧施于右侧的力必然是平衡的）。

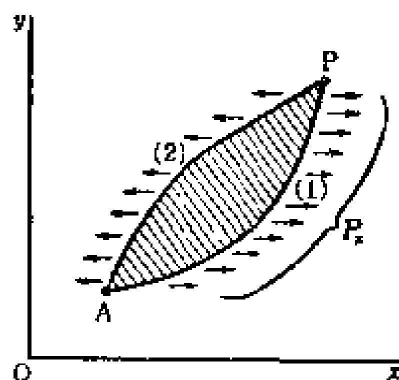


图 2.3

为了将上述物理意义联系起来，我們将 $\phi(x, y)$ 写成 P_x，即

$$P_x = \int_A^P (\sigma_x dy - \tau_{xy} dx). \tag{2.8}$$

同理，綫积分

$$P_y = \int_A^P (\tau_{xy} dy - \sigma_y dx) \tag{2.9}$$

---

❶ 这一句如改述如下，似乎更清楚些："如假定从 A 向 P 的方向为正方向，然后取向着正方向前进的观察者的右側为路綫 AP 的正法綫方向，而假定从路綫 AP 的法綫正側作用于其元素 ds 上的 x 分量为 $P_x ds$。"（下同）——校者注

的物理意义也与路綫选取无关。因此与(2.5)等价的公式为

$$\sigma_x=\frac{\partial P_x}{\partial y},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial P_x}{\partial x};\quad \tau_{xy}=\frac{\partial P_y}{\partial y},\quad \sigma_y=-\frac{\partial P_y}{\partial x}. \tag{2.10}$$

在此对应于同一个 τ_{xy} 的两个导数必須相等,因此有

$$\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}=0. \tag{2.11}$$

由于該式是 P_xdy-P_ydx 成为完全微分的充要条件,所以綫积分

$$F(x,\ y)=\int_A^P(P_xdy-P_ydx) \tag{2.12}$$

的值与从 A 到 P 的路綫选取无关,因此得到

$$P_x=\frac{\partial F}{\partial y},\quad P_y=-\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{2.13}$$

将此式代入(2.10)即得

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{2.14}$$

通常对于应力分量具有上述关系的函数 $F(x,\ y)$,我們称为 **Airy 应力函数**。在研究它的一般理論之前,我們先討論(2.12)所定义的 F 的物理意义。为了与路綫上任意点的坐标 $(x,\ y)$ 区别起見,我們取終点 P 的坐标为 $(x_P,\ y_P)$,将(2.12)作分部积分,即得

$$\begin{aligned}F(x_P,\ y_P)&=\int_A^P(P_xdy-P_ydx)=\Big[yP_x-xP_y\Big]_A^P-\int_A^P(ydP_x-xdP_y)\\&=y_PP_x(x_P,\ y_P)-x_PP_y(x_P,\ y_P)+\int_A^P(xdP_y-ydP_x)\\&=\int_A^P\{(y_P-y)dP_x-(x_P-x)dP_y\}\end{aligned} \tag{2.15}$$

(在 A 点 P_x 及 P_y 都是0——参照(2.8),(2.9))。最后的积分,表示由路綫右側施于左側的力,关于 P 点的力矩。所以(2.12)所定义的函数 $F(x,\ y)$ 具有这样的意义:对于由 A 到 P 的任意路綫,

从右侧施于左侧的力关于 P 点的力矩。此积分之所以与路綫无关，也可由此物理意义給予解釋。

通常与应力分量具有(2.14)那样关系的函数 $F(x, y)$ 叫做 Airy 应力函数。由上面关于終点合力矩所定义的 F 是 Airy 应力函数的一种，称为"以 A 为基准点的标准 Airy 应力函数"。若将它表为 $F_A(x, y)$，则对于同一应力状态的 Airy 应力函数的一般表达式为

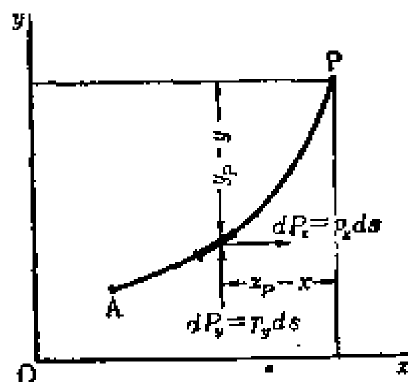


图 2.4

$$F(x, y)=F_A(x, y)+Ax+By+C, \qquad (2.16)$$

此处 A, B, C 都是任意常数。

証明： 若求(2.16)的二阶导数，則附加項消失。反之，若某一函数所有的二阶导数为 0，则函数只能具有 $Ax+By+C$ 的形式。

对于一般 Airy 应力函数，虽然不能象上述标准 Airy 应力函数那样具有明确的物理意义，但它們确具有如下的性质，即

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A^B, \quad \left[-\frac{\partial F}{\partial x}\right]_A^B, \quad \left[F-x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A^B \qquad (2.17)$$

分别等于对 A 到 B 的任意路綫,从右侧施于左侧的合力的 x 分量, y 分量,以及合力关于原点的合力矩。

証明

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A^B=\int_A^B\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx\right)=\int_A^B(\sigma_x dy-\tau_{xy}dx)=\int_A^B p_x ds,$$

同理, $\left[-\frac{\partial F}{\partial x}\right]_A^B=\int_A^B p_y ds$,

$$\left[F-x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A^B=\int_A^B\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(F-x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(F-x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\right\}$$

$$=\int_A^B\left\{-x\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx\right)-y\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx\right)\right\}$$

$$=\int_A^B\left\{x(\tau_{xy}dy-\sigma_y dx)-y(\sigma_x dy-\tau_{xy}dx)\right\}$$

$$=\int_A^B(xp_y-yp_x)ds.$$

§3 协調条件，位移及旋轉

現在討論加上載荷以前，体內到处无应力的情形❶ [注 1]，幷設由載荷引起的位移是微小的。令 (u, v, w) 代表位移的分量，因而一般应变的分量有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};\\&\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

旋轉的分量如下：

$$\tilde{\omega}_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \tilde{\omega}_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\tilde{\omega}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).\tag{3.2}$$

在平面問題中，仅有位移分量 u 及 v，应变分量 ε_x，ε_y，γ_{xy}，以及旋轉分量 $\tilde{\omega}_{xy}$ 是主要的量（又由于在平面問題中，可以把 $\tilde{\omega}_{xy}$ 看成标量，所以以后簡单的記作 $\tilde{\omega}$）。它們之間的关系，由上式得知为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y};\tag{3.3}$$

$$\tilde{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).\tag{3.4}$$

将它們結合起来，就得到

❶ 即无預应力的情形。——校者注

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}+\tilde{\omega},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}-\tilde{\omega}. \tag{3.5}$$

在平面問題中仅有一个“不协調度”分量[注 2]

$$R_z=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{3.6}$$

是重要的。将(3.3)代入(3.6)內，則得

$$R_z=0. \tag{3.7}$$

由于最初假設了問題是处于无应力状态，从而导出不协調度为零。故称(3.7)为这种情形的协調条件。

将(1.3)代入(3.6)，則有

$$R_z=\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\nu\sigma_x)+\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\nu\sigma_y)-\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_{xy}. \tag{3.8}$$

将(1.2)第二式的 G 和(2.14)的应力分量代入(3.8)，則有

$$\begin{aligned}R_z&=\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\\&\quad-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\\&=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}\right).\end{aligned} \tag{3.9}$$

若(3.7)成立，則有

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0, \tag{3.10}$$

这表示 Airy 应力函数 $F(x, y)$ 是重調和函数。

[注 1] 实际上无应力的彈性体是几乎不存在的。关于具有“固有应力”❶的彈性体，上面对位移及旋轉的討論在此就不适合了。同时在此不协調度也不为零。(参照森口：“彈性体のクイチガイの基本理論”，应用数学力学，1卷1号(1947年6月)，29～36頁。)

[注 2] 不协調度的分量是

❶ 即具有預应力。——校者注

$$
\left.\begin{aligned}
R_x &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
U_x &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\
R_y &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\
U_y &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\
R_z &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
U_z &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}
$$

至于(3.1)所表示的应变，它們都为零。通常将这六个式子設为零而得的六个方程称为“协調条件”。(参照森口前著(見注1))

［注3］无固有应力时，不协調度必为零；但不协調度为零时，却不一定无固有应力(参照§8)。

§4 复应力函数

在一般情形，重調和函数 $F(x, y)$ 可表示为

$$F(x, y) = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)]. \tag{4.1}$$

在此 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 都是 z 的解析函数[注1]。由于 Airy 应力函数是重調和函数(§3)，因此也应該表示为(4.1)的形状，这时的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 就叫作“复应力函数”。

当已知应力状态时，除去一定形式的附加項(§7)外，可以唯一决定相应的复应力函数；为了討論的方便，我們将用如下的式子[注2]来定义它：

$$\varphi(z) = \frac{E}{4}(u + iv) + \frac{1+\nu}{4}(-P_y + iP_x), \tag{4.2}$$

$$\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z) = -\frac{E}{4}(u - iv) + \frac{3-\nu}{4}(-P_y - iP_x). \tag{4.3}$$

在此，P_x 及 P_y 表示对于自基准 A 到終点 $P(x,y)$ 的任意路綫，从

右側到左側的力的合力的 x 分量及 y 分量，u, v 表示位移分量，E 是 Young 模量，ν 是 Poisson 比(在"平面应变問題"中，将 E, ν 分别代以 E', ν'(§1))。

下面将証明由 (4.2) 及 (4.3) 所定义的函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 是解析函数。将变数 x, y 用 z, $\bar{z}$ 代换，則 u, v, P_x, P_y 就变成了变数 z 及 $\bar{z}$ 的函数[注 3]。此时討論如下微分：

$$
\begin{aligned}
d(u+iv) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \\
&= \left[\varepsilon_x+i\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}+\tilde{\omega}\right)\right]dx+\left[\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}-\tilde{\omega}\right)+i\varepsilon_y\right]dy \\
&= \left[\frac{\sigma_x-\nu\sigma_y}{E}+i\left(\frac{\tau_{xy}}{2G}+\tilde{\omega}\right)\right]\frac{dz+d\bar{z}}{2} \\
&\quad +\left[\left(\frac{\tau_{xy}}{2G}-\tilde{\omega}\right)+i\frac{\sigma_y-\nu\sigma_x}{E}\right]\frac{dz-d\bar{z}}{2i} \\
&= \left[\frac{1-\nu}{2E}(\sigma_x+\sigma_y)+i\tilde{\omega}\right]dz+\frac{1+\nu}{2E}(\sigma_x-\sigma_y+i2\tau_{xy})d\bar{z} \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

(在此已用过(3.5), (1.3))．又

$$
\begin{aligned}
d(-P_y+iP_x) &= -(\tau_{xy}dy-\sigma_y dx)+i(\sigma_x dy-\tau_{xy}dx) \\
&= (\sigma_y-i\tau_{xy})dx+(-\tau_{xy}+i\sigma_x)dy \\
&= (\sigma_y-i\tau_{xy})\frac{dz+d\bar{z}}{2}+(-\tau_{xy}+i\sigma_x)\frac{dz-d\bar{z}}{2i} \\
&= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}dz+\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}-i\tau_{xy}\right)d\bar{z} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

(已用过(2.8), (2.9))．同理，以上两式的共軛式，可得如下两式：

$$
d(u-iv)=\left[\frac{1-\nu}{2E}(\sigma_x+\sigma_y)-i\tilde{\omega}\right]d\bar{z}+\frac{1+\nu}{2E}(\sigma_x-\sigma_y-i2\tau_{xy})dz, \qquad (4.6)
$$

$$
d(-P_y-iP_x)=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}d\bar{z}+\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}\right)dz. \qquad (4.7)
$$

于是由这些結果就可得(4.2), (4.3)右边的微分，即

$$
d\left[\frac{E}{4}(u+iv)+\frac{1+\nu}{4}(-P_y+iP_x)\right]=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}+i\frac{E}{4}\tilde{\omega}\right)dz+0\cdot d\bar{z}, \qquad (4.8)
$$

$$d\left[-\frac{E}{4}(u-iv)+\frac{3-\nu}{4}(-P_y-iP_x)\right]$$

$$=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}+i\frac{E}{4}\tilde{\omega}\right)d\bar{z}+\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}\right)dz. \qquad (4.9)$$

由(4.8)首先得知(4.2)右边对 $\bar{z}$ 的导数为零，即(4.2)的右边与 $\bar{z}$ 无关，且仅为 z 的函数。因此可取为 $\varphi(z)$。于是其导数 $\varphi'(z)$ 应該等于(4.8)右边 dz 的系数。但是(4.9)右边 $d\bar{z}$ 的系数和它完全一样。所以(4.3)的右边应該是 $\bar{z}\varphi'(z)$ +(仅为 z 的函数)。因此，将它写成(4.3)左边的形状，则 $\psi'(z)$ 仅为 z 的函数。以 $\psi'(z)$ 为导数的函数 $\psi(z)$ 也是 z 的解析函数。

由以上証明，得关系式如下:

$$\varphi'(z)=\frac{1}{4}(\sigma_x+\sigma_y)+i\frac{1}{4}E\tilde{\omega}, \qquad (4.10)$$

$$\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)+i\tau_{xy}. \qquad (4.11)$$

由此两式就得到用复应力函数表示应力分量的公式，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]-\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)],\\ \sigma_y&=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]+\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)],\\ \tau_{xy}&=\mathrm{Im}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)].\end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

再由(4.2)，(4.3)消去 P_x 及 P_y，得

$$u-iv=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\varphi(z)}-\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}\right]. \qquad (4.13)$$

与此相反，若消去 u 及 v，则得

$$-P_y-iP_x=\overline{\varphi(z)}+\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}. \qquad (4.14)$$

这些公式今后将时常引用[注 4]。

最后用(4.2)，(4.3)所定义的 $\varphi(z)$，$\psi(z)$，作成(4.1)的右边时，我們将証明它是 Airy 应力函数。先把它記作 $\chi(z,\bar{z})$:

$$2\chi(z,\bar{z})=\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)+z\overline{\varphi}(\bar{z})+\overline{\psi}(\bar{z}). \qquad (4.15)$$

取其微分并利用(4.14)，則得

$$2d\chi=[\bar{\varphi}(\bar{z})+\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)]dz+[\varphi(z)+z\bar{\varphi}'(\bar{z})+\bar{\psi}'(\bar{z})]d\bar{z}$$
$$=(-P_y-iP_x)(dx+idy)+(-P_y+iP_x)(dx-idy)$$
$$=2(-P_ydx+P_xdy). \tag{4.16}$$

所以

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=-P_y,\quad \frac{\partial\chi}{\partial y}=P_x. \tag{4.17}$$

在此，利用(2.10)，就得到

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}. \tag{4.18}$$

这表明 χ 是一个 Airy 应力函数(参照(2.14))。

［注 1］ 公式(4.1)最初是 E. Goursat[Bull. de la Soc. Math. de France (1898), 236～237] 所提出的。

［注 2］ 在此除了推导方法有些麻烦以外，利用这个定义将对第 2 章的討論比較方便。

［注 3］ u, v, P_x, P_y 是两变量 x, y的解析函数，当 x, y 都是实数且点 (x, y)落在弹性体实际所占的区域中时，函数的值将直接給出它們所代表的物理量。由于它們对任意的点都是正则的，因此可扩張(解析开拓)到 x, y 是复变数的情形，这样，再作变换 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$，就可把 z 与 $\bar{z}$ 看作独立变量(不过，z 与 $\bar{z}$ 一般已不是共軛的了)。在这种意义下，我們称$(z, \bar{z})$的函数(一般取复数值)为多复变函数 (polygenic function)。在特殊的情形，若函数与 $\bar{z}$ 无关而仅为 z 的函数，則称之为单复变函数 (monogenic function)，这时恰好就是普通所指的 z 的解析函数。

［注 4］ N. Muschelišvili [ZAMM, **13**, (1933), 264], G. Kolossoff [ZMP, **62** (1914), 386] 等也曾导出和(4.13), (4.14)內容相同的公式，但推导方法稍有不同。

§5 边 界 条 件

作为弹性問題的边界条件，可考虑这样情况，例如，第一，已知边界上作用的外力，第二，已知边界上的位移。

Airy 应力函数的解法专用在第一种情形。此时，令作用在边

界单位长度上的外力为(p_x, p_y)，将边界取作§2中的路綫，那末显然有

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=p_x, \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=p_y, \tag{5.1}$$

在此s表示边界曲綫的弧长。再将它們沿边界作积分，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=A-\int_0^s p_y ds, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=B+\int_0^s p_x ds, \tag{5.2}$$

这样便确定了边界上F的梯度(积分常数A，B可以是任意的)。因此切綫方向的梯度$\partial F/\partial s$及法綫方向的梯度$\partial F/\partial n$也就随着确定了。再用在边界上所确定的$\partial F/\partial s$就能确定F在边界上的值(除去一个积分常数外)。所以此时可看作在边界上已知F及$\partial F/\partial n$ [注1]。

特别，在边界上不受外力时，由(5.2)则有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=A, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=B \quad (A, B \text{ 是常数}) \tag{5.3}$$

于是

$$F=Ax+By+C, \quad \frac{\partial F}{\partial n}=A\frac{\partial x}{\partial n}+B\frac{\partial y}{\partial n}. \quad (A, B, C \text{ 是常数}) \tag{5.4}$$

当边界是一条連續閉曲綫时，可将(5.2)及(5.3)里的A、B取为零。这相当于在边界上适当选取“基准点A”(§2)。当边界由两条以上連續曲綫所組成时，允許对其中任一条作同样处理，但对其余各条边界就不能任意选取A，B．它們仅当問題已經解决后才可以定下来($\partial F/\partial x$及$\partial F/\partial y$的力学意义参照(2.13))。

当已知的是位移的边界条件时，要用Airy应力函数表示出这个条件比較繁难。

在用复应力函数表示边界条件时，只要利用(4.13)，(4.14)就行了。即当已知在边界上的外力时就用(4.14)、已知边界上的位

移时就用(4.13)。将(4.13)和(4.14)組合起来，可定出在边界上位移与外力的这一关系式[注 2]。

[注 1] 最初将边界条件写成这样形式的，据説是 J. H. Michell [参照 Bricas (見本书 § 11, (2))70 頁; Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 202]。

[注 2] (4.13)与(4.14)很类似。即当 $\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ 时，則

$$\varkappa\overline{\varphi(z)}-\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\} \tag{5.5}$$

等于 $2G(u-iv)$，若 $\varkappa=-1$，則它等于 P_y+iP_x。这說明了对于这两种边界条件的問題，其求解方法从数学的观点来看是一致的。

§6 簡单例題

以上仅討論了一般的理論，本节将給出一些复应力函数的具体形式，并从而討論它們所表示的應力状态。

例 1 取复应力函数为

$$\varphi(z)=Az, \quad \psi(z)=Bz^2, \tag{6.1}$$

其中 A, B 都是复常数。将它們代入(4.10)，(4.11)得

$$A=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}+i\frac{E}{4}\tilde{\omega}, \tag{6.2}$$

$$2B=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}. \tag{6.3}$$

以后将复常数 C 的实部写成 $C^{\cdot}$，虛部写成 C'，則

$$A^{\cdot}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}, \quad A'=\frac{E}{4}\tilde{\omega}; \tag{6.4}$$

$$B^{\cdot}=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{4}, \quad B'=\frac{\tau_{xy}}{2}。 \tag{6.5}$$

故应力分量处处等于下列的常数:

$$\sigma_x=2(A^{\cdot}-B^{\cdot}), \quad \sigma_y=2(A^{\cdot}+B^{\cdot}), \quad \tau_{xy}=2B'. \tag{6.6}$$

这样，复应力函数(6.1)表示均匀应力状态。此时由(4.13)可知位移分量为

$$
\begin{aligned}
u-iv&=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\bar{A}\bar{z}-\{\bar{z}A+2Bz\}\right]\\
&=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}(A^{\cdot}-iA')(x-iy)\right.\\
&\quad\left.-(A^{\cdot}+iA')(x-iy)-2(B^{\cdot}+iB')(x+iy)\right]\\
&=\frac{1}{2G}\left[\left(\frac{2-2\nu}{1+\nu}A^{\cdot}-\frac{4}{1+\nu}iA'\right)(x-iy)\right.\\
&\quad\left.-2(B^{\cdot}+iB')(x+iy)\right]\\
&=\frac{1}{E}[\{2(1-\nu)A^{\cdot}-4iA'\}(x-iy)\\
&\quad-2(1+\nu)(B^{\cdot}+iB')(x+iy)],
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

即

$$
\left.
\begin{aligned}
u&=\frac{1}{E}[2(1-\nu)A^{\cdot}x-4A'y-2(1+\nu)B^{\cdot}x+2(1+\nu)B'y],\\
v&=\frac{1}{E}[2(1-\nu)A^{\cdot}y+4A'x+2(1+\nu)B^{\cdot}y+2(1+\nu)B'x].
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.8}
$$

此外，由(4.1)可求出 Airy 应力函数，得

$$
\begin{aligned}
F(x,\ y)&=\mathrm{Re}[\bar{z}Az+Bz^2]\\
&=A^{\cdot}(x^2+y^2)+B^{\cdot}(x^2-y^2)-2B'xy\\
&=(A^{\cdot}+B^{\cdot})x^2+(A^{\cdot}-B^{\cdot})y^2-2B'xy.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

利用上式及(2.14)也可导出(6.6)。通常，当 Airy 应力函数为自变量的二次形时，它表示均匀应力状态。

例2 取复应力函数为

$$
\varphi(z)=Cz^2,\quad \psi(z)=\frac{1}{3}Cz^3,
\tag{6.10}
$$

其中 C 为实常数。这时有

$$
\varphi'(z)=2Cz,\quad \bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)=2C\bar{z}+2Cz=4Cx,
\tag{6.11}
$$

将其代入(4.12)得

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2(2Cx) - 4Cx = 0, \\
\sigma_y &= 2(2Cx) + 4Cx = 8Cx, \\
\tau_{xy} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.12)
$$

在此仅有应力分量 σ_y 不为零，而 σ_y 的大小和 x 成比例。例如受有图 6.1 那样弯曲载荷的长方板就是这样的应力状态。在此情形，弯矩为

$$
M = \int_{-a}^{a} x 8Cx\, dx = \frac{16}{3} Ca^3. \qquad (6.13)
$$

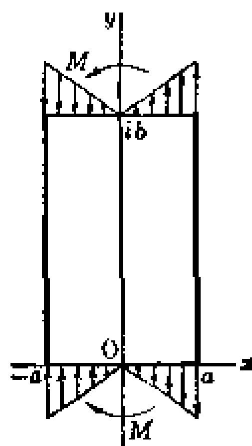


图 6.1

再由 (4.1) 求 Airy 应力函数，得到

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= \mathrm{Re}\left[\bar{z} Cz^2 + \frac{1}{3} Cz^3\right] \\
&= C\mathrm{Re}\left[(x^2+y^2)(x+iy) + \frac{1}{3}(x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3)\right] \\
&= C\left\{(x^2+y^2)x + \frac{1}{3}(x^3-3xy^2)\right\} \\
&= \frac{4}{3} Cx^3. \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

例 3 取复应力函数为

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= 2ik(z^3-3az^2), \\
\psi(z) &= -ik(z^4-2az^3+12b^2z^2),
\end{aligned}\right\} \qquad (6.15)
$$

其中 a, b, k 为实常数。为了討論它們所表示的应力状态，将它們代入 (4.10) 及 (4.11)，即得

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4} + i\frac{E}{4}\tilde{\omega} &= \varphi'(z) = 6ik(z^2-2az) \\
&= 12k(a-x)y + i6k(x^2-y^2-2ax), \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2} + i\tau_{xy} &= \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \\
&= -12k(a-x)y + i24k(y^2-b^2). \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

由此可知

$$\sigma_x = 48k(a-x)y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 24k(y^2 - b^2), \tag{6.18}$$

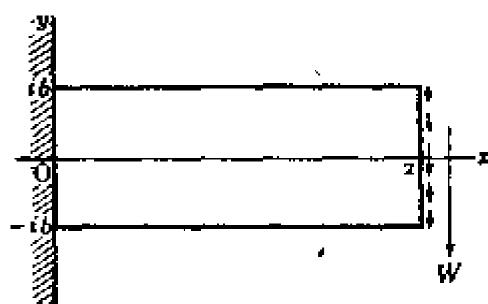


图 6.2

在 $x=a$，有 $\sigma_x=0$；在 $y=\pm b$，有 $\tau_{xy}=0$。例如图6.2那样的长方板在右端受有按照 $\tau_{xy}=-24k(b^2-y^2)$ 分布的剪切载荷，且上下边都是自由的，而左端为适当的支持的情形，就可看作是这样的应力状态。此时的剪切载荷的合力(剪切力)为

$$W=\int_{-b}^{b} 24k(b^2-y^2)dy=\left[24k\left(b^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\right]_{-b}^{b}=32kb^3. \tag{6.19}$$

第2章　复应力函数一般理論

§7　标准化与附加項

在复应力函数的定义式(4.2)及(4.3)中，包含着位移 u, v 及合力 P_x, P_y. 首先假設位移已經确定，又合力 P_x,P_y 随着基准点 A 的指定而决定，于是再利用(4.2)和(4.3)也就确定了 $\varphi(z)$ 和 $\psi'(z)$. 为了使从(4.1)导出的 $F(x, y)$和标准的(2.12)式一致，只要适当选定由 $\psi'(z)$求 $\psi(z)$时所引进的积分常数就可以了(其虚部与 $F(x, y)$无关，可任意选取)。这样就得到了与"以 A 为基准点的标准 Airy 应力函数"相应的"标准复应力函数"。

若有这样的問題，按照它們的要求，仅需求出应力分布，而对位移与旋轉不考虑的話，則可采取一种把問題标准化的方法，就是在不影响(4.12)的情形下，尽量把公式簡化。这时，由于 Re $[\varphi'(z)]$ 仅由应力所决定(參看(4.10))，所以它是唯一确定的。又因为$\varphi''(z)$ 的实部与虚部可以用 Re$[\varphi'(z)]$ 的导数来表达[注1]，所以它也是唯一确定的。再根据(4.11)可知$\psi''(z)$也是唯一确定的。这样，我們只允許对 $\varphi(z)$ 及$\psi(z)$加上一些使上面三者都不变的項，从而它們非取下列形状不可：

$$\varphi_0(z)=iC_0z+\alpha_0,\quad \psi_0(z)=\beta_0z+\gamma_0, \tag{7.1}$$

其中 C_0 是实数，α_0, β_0, γ_0 一般是复数。

反之，若任意选取这些常数，作成(7.1)中的函数，再分别附加在 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 上，則对应力分量(4.12)不产生影响。因此适当选取附加項可以使問題簡化。这种作法，在实际計算上頗为有用。

(7.1) 是不影响应力分量的項，这就是說"对应于一个应力状

态的复应力函数含有七个未定实常数"。其中三个可以利用 Airy 应力函数的标准化来决定，已如前述。另外三个可利用位移和旋轉的約束条件来决定。最后还剩下一个未确定❶。

首先說明附加項(7.1)对 Airy 应力函数，位移和旋轉的影响，为此討論(4.1)及(4.13)的附加項，得

$$F_0=\mathrm{Re}[\bar{z}(iC_0z+\alpha_0)+(\beta_0z+\gamma_0)]$$
$$=(\alpha_0^{\cdot}+\beta_0^{\cdot})x+(\alpha_0'-\beta_0')y+\gamma_0^{\cdot}, \tag{7.2}$$

$$u_0-iv_0=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}(-iC_0\bar{z}+\bar{\alpha}_0)-\{\bar{z}(iC_0)+\beta_0\}\right]. \tag{7.3}$$

由此可知在位移中出現的附加項为

$$\left.\begin{aligned}u_0&=-\frac{4}{E}C_0y+\frac{3-\nu}{E}\alpha_0^{\cdot}-\frac{1+\nu}{E}\beta_0^{\cdot},\\ v_0&=+\frac{4}{E}C_0x+\frac{3-\nu}{E}\alpha_0'+\frac{1+\nu}{E}\beta_0'.\end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

再利用(4.10)可求得在旋轉中出現的附加項是

$$\tilde{\omega}_0=\frac{4}{E}\mathrm{Im}[iC_0]=\frac{4}{E}C_0, \tag{7.5}$$

在此，复常数右肩上附有·及′分别表示它的实部及虚部(这种記号在§6里用过，今后还将时常使用)。

[注1] 通常将 $z=x+iy$ 的解析函数 $f(z)$ 的实部及虚部各看作是 x,y 的函数，而写成 $f(z)=R(x,y)+iS(x,y)$，其导数記作 $f'(z)=T(x,y)+iU(x,y)$，它的实部及虚部可由 R 和 S 通过 $T=\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial S}{\partial y}$, $U=\dfrac{\partial S}{\partial x}=-\dfrac{\partial R}{\partial y}$ 导出。因此說明了仅由 R 就可导出 T 及 U。这在我們的討論中是很重要的。

[注2] Muschelišvili 的論文(§4 注4)中虽有类似于这里的討論，但他沒有考虑到 Airy 应力函数的标准化，这是不够完美之处。若将他的記号和我們的記号作比較，則有(左边是 Muschelišvili 的)：

$$\varphi_1(z)=\varphi(z),\quad \psi_2(z)=\psi(z),\quad \psi_1(z)=\psi'(z),$$
$$\Phi(z)=\varphi'(z),\quad \Psi(z)=\psi''(z). \tag{7.6}$$

---

❶ 由于它的存在与否对全部問題不生影响，因此通常取它为零。——校者注

[注 3] 为了得到一般性的討論,可这样地进行标准化,即在基准点 A 处指定 $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\mathrm{Im}[\varphi'(z)]$, $\psi'(z)$ 的值,这样有許多的便利。

§8 多值性与合力及位錯

給出一个应力状态时,与它对应的复应力函数虽有很多,但都可按上节所說加以标准化,这便是在某基准点 A 处确定 $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\mathrm{Im}[\varphi'(z)]$, $\psi'(z)$ 的值。但当彈性体的区域 (D) 是多連通区域(除去了象外力的着力点那样的奇点)时,即使作了上述标准化,也要发生多值性的問題。

在多連通区域 (D) 内加一割綫,使它变成单連通区域,則 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 就变成在其上定义的函数,但在割綫两側 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 可能是不連續的。对在 A 点标准化了的 $\varphi(z)$, $\psi(z)$,由点 A 出发,沿着任意曲綫作解析开拓,則它們或者变为单值解析函数,或者变为多值函数,不能一概而論。若函数为多值函数,則在 (D) 内加一割綫后虽可强制地使它变成单值函数,但在割綫的两側函数值必然不一致,这正是应力函数在区域 (D) 中不連續的原因,故不連續性可以理解为解析函数的多值性。

若区域 (D) 是多連通的,則在 (D) 内存在着不同倫 (homotop) 于 0 的圈道(将該圈道連續变形收縮时,最后必逸出区域 (D) 外)。取其一为 Γ. 下面来考虑 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 从 Γ 上一点 A 沿 Γ 繞行一周再回到 A 时的变化 (图 8.1)。此时終点与始点相重,但为了叙述方便起見,用 A' 表示終点以区别于始点。于是将沿 Γ 从 A 到 A' 环行一周后,

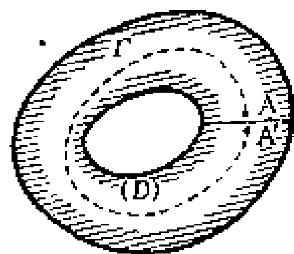


图 8.1

$\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的值分别变为 $[\varphi(z)]_A^{A'}$ 及 $[\psi(z)]_A^{A'}$ (严格說来,将一周后 A' 点的函数元素和开始时 A 点的函数元素相比較,其差用 $[\quad]_A^{A'}$ 表示. 而 $[\quad]_A^{A'}$ 演算和微分演算是可換的)。

应力分量$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$在区域$(D)$必須是单値的，因为在任一点的应力不可能具有两个不同的値。从而由(4.10)可知$\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$是单値的。同时由于$\varphi''(z)$的实部和虚部都可表示为$\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$的导数，因此它也必須是单値的。最后再由(4.11)可知$\psi''(z)$是单値的。即根据力学意义必須成立如下条件：

$$\mathrm{Re}[\varphi'(z)]_A^{A'}=0,\quad [\varphi''(z)]_A^{A'}=0,\quad [\psi''(z)]_A^{A'}=0. \tag{8.1}$$

由此首先有

$$[\varphi'(z)]_A^{A'}=iC,\quad [\psi'(z)]_A^{A'}=\beta, \tag{8.2}$$

然后推出

$$[\varphi(z)]_A^{A'}=iCz+\alpha,\quad [\psi(z)]_A^{A'}=\beta z+\gamma, \tag{8.3}$$

在此C是实常数，α，β，γ是复常数，z是A点的复数坐标。这四个常数（按实数說是七个常数）不論在圈道Γ上取那一个点作为A点都是相同的。又对于与Γ同倫的圈道(即不逸出区域(D)外而可連續变到Γ的圈道）也都相同，且对于圈道相加，其对应常数也相加，即Γ同倫于二圈道Γ_1与Γ_2之和$\Gamma_1+\Gamma_2$时，則对于Γ的C，α，β，γ等于它們对于Γ_1及Γ_2的各对应値之和。因此，若想知道在区域(D)中函数$\varphi(z)$，$\psi(z)$的多値性，必須而且只須知道这些常数对于(D)內圈道的同調群的基底的値。簡单說来，若(D)有几个孔，那末只須作那些分別繞每孔一周的圈道，知道了这些圈道上的常数値就够了。

再者，为了說明这些常数C，α，β，γ的力学意义，我們将利用(4.13)来討論$[u]_A^{A'}$及$[v]_A^{A'}$。因为$[\quad]_A^{A'}$是綫性运算，所以

$$[u-iv]_A^{A'}=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}(-iC\bar{z}+\bar{\alpha})-\{\bar{z}iC+\beta\}\right]. \tag{8.4}$$

分开此式的实部和虚部，则得

$$\left.\begin{aligned}[u]_A^{A'}&=-\frac{4}{E}Cy+\frac{3-\nu}{E}\alpha'-\frac{1+\nu}{E}\beta',\\ [v]_A^{A'}&=+\frac{4}{E}Cx+\frac{3-\nu}{E}\alpha''+\frac{1+\nu}{E}\beta''.\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

再由(4.10)可求得$[\tilde{\omega}]_A^{A'}$. 由此及(8.5)得到如下三式:

$$\left.\begin{aligned}&[\tilde{\omega}]_A^{A'}=\frac{4}{E}C,\quad [\xi]_A^{A'}=[u+\tilde{\omega}y]_A^{A'}=\frac{3-\nu}{E}\alpha^{\cdot}-\frac{1+\nu}{E}\beta^{\cdot},\\ &\qquad [\eta]_A^{A'}=[v-\tilde{\omega}x]_A^{A'}=\frac{3-\nu}{E}\alpha'+\frac{1+\nu}{E}\beta'.\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

这三个量称为圍道Γ上的位錯分量[注1]。

其次，由(4.1)可知，对于和$\varphi(z)$, $\psi(z)$相对应的Airy应力函数,有如下关系式成立:

$$[F]_A^{A'}=(\alpha^{\cdot}+\beta^{\cdot})x+(\alpha'-\beta')y+\gamma^{\cdot}. \tag{8.7}$$

所以

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_A^{A'}=\alpha^{\cdot}+\beta^{\cdot},\quad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_A^{A'}=\alpha'-\beta'. \tag{8.8}$$

按照$\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$的力学意义(2.13)，它們和从圍道$\Gamma$的右側作用于左側的力的合力有关。現在令从圍道$\Gamma$的左側作用于右側的力的合力为$(X, Y)$，且令关于原点的合力矩为$M_0$，則有

$$X=-\alpha'+\beta',\ Y=\alpha^{\cdot}+\beta^{\cdot},\ M_0=-\gamma^{\cdot} \tag{8.9}$$

(为了将X, Y, M_0与作用于孔的外力的合力及合力矩相联系,故在此取負側进行討論)。

由以上所述,我們知道了C, $\alpha^{\cdot}$, α', $\beta^{\cdot}$, β', $\gamma^{\cdot}$的力学意义。仅有一个常数γ'无力学意义。

[注1] 在多連通区域情形,位移u, v及旋轉$\tilde{\omega}$的决定可討論如下:

当协調条件(3.7)到处成立时,則全微分方程

$$d\tilde{\omega}=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y}\right)dy \tag{8.10}$$

是可积的,所以由此可决定旋轉$\tilde{\omega}(x, y)$. 再利用它可考虑全微分方程

$$du=\varepsilon_x dx+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}-\tilde{\omega}\right)dy,\quad dv=\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}+\tilde{\omega}\right)dx+\varepsilon_y dy, \tag{8.11}$$

这些方程是可积的,由此可决定位移u及v. 若在点A有$u=v=\tilde{\omega}=0$, 則积分常数就可确定,故在单連通区域的情形,位移及旋轉可唯一决定。

在多連通区域的情形,即使协調条件(3.7)到处成立,对所决定的u, v, $\tilde{\omega}$

也不一定是单值函数。但是作为特殊情形，存在着它們都是单值函数，而不具位錯的彈性体。在有位錯时，位錯分量由

$$[\tilde{\omega}]=\oint d\tilde{\omega},\ [\xi]=\oint(du+y d\tilde{\omega}),\ [\eta]=\oint(dv-x d\tilde{\omega}) \tag{8.12}$$

所决定。右边的 $d\tilde{\omega}$, du, dv 和(8.10)，(8.11) 中的相同，积分是沿任意圍道进行的。它們对于同倫的圍道有相同的值。此时 u, v, $\tilde{\omega}$ 都是多值函数，多値性由上述位錯分量的公式，对各独立圍道积分所得的值来决定。

例 設复应力函数为

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=Lz\log z+M\log z+f_1(z),\\ \psi(z)&=Nz\log z+K\log z+f_2(z),\end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

其中 L 是实数，M, N, K 是复数，$f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 是单值函数。假設圍道 Γ 环繞原点，我們来求位錯的三个分量、合力与合力矩。

当沿圍道 Γ 繞行一周时，有

$$\left.\begin{aligned}[][\varphi(z)]&=2\pi iLz+2\pi iM,\\ [\psi(z)]&=2\pi iNz+2\pi iK,\end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

即在(8.3)式内常数 C, α, β, γ 为

$$C=2\pi L,\ \alpha=2\pi iM,\ \beta=2\pi iN,\ \gamma=2\pi iK. \tag{8.15}$$

因此得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha''=-2\pi M',\ \alpha'=2\pi M'',\ \beta''=-2\pi N',\ \beta'=2\pi N'',\\ &\gamma''=-2\pi K',\ \gamma'=2\pi K''.\end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

将这些值代入(8.6)，(8.9)，即得

$$\left.\begin{aligned}&[\tilde{\omega}]=\frac{8\pi}{E}L,\ [\xi]=\frac{2\pi}{E}\{-(3-\nu)M'+(1+\nu)N'\},\\ &\qquad\qquad [\eta]=\frac{2\pi}{E}\{(3-\nu)M''+(1+\nu)N''\},\end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

$$X=2\pi(-M''+N''),\ Y=2\pi(-M'-N'),\ M_0=2\pi K'. \tag{8.18}$$

［注 2］ 在 (8.13) 中由于項 L, M, N, K 的存在，因此它是表示圍繞原点具有多值性的一个重要公式。同样，对于圍繞点 a 的多值性的公式乃是将(8.13)的 $\log z$ 代以 $\log(z-a)$ 而得到的。于是 L, M, N, K 的物理意义由(8.17)，(8.18)給出。将它們結合起来，即得

$$[\tilde{\omega}]=\frac{8\pi}{E}L,\ [\xi+i\eta]=\frac{2\pi i}{E}\{(3-\nu)M+(1+\nu)\overline{N}\}, \tag{8.19}$$

$$X+iY=2\pi(-M+\overline{N}),\ M_0=2\pi K'. \tag{8.20}$$

若将它們解开，則有

$$\left.\begin{aligned}&L=\frac{E}{8\pi}[\bar{\omega}],\quad M=\frac{E}{8\pi}[\eta-i\xi]-\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY),\\&N=\frac{E}{8\pi}[\eta+i\xi]+\frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY),\quad K=K'+\frac{iM_0}{2\pi}.\end{aligned}\right\}\tag{8.21}$$

§9 坐标变换

以上討論都是对一个直角坐标系进行的。下面我們要討論由一个直角坐标系变到另一个直角坐标系时，复应力函数的变换法則。

1. 坐标系的平移 在坐标系 Oxy 中用平移将原点移到点 $z=\alpha$，命新坐标为 (x_1, y_1)，設 $z_1=x_1+iy_1$，則

$$z_1=z-\alpha. \tag{9.1}$$

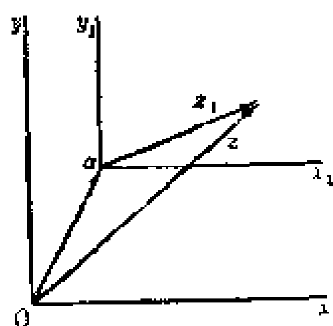


图 9.1

对于新坐标定义的应力函数以及其他的量，都将附加标号 1 以示区别。若标准化的条件不变，Airy 应力函数是不变的(見 §2 的力学意义)，即 $F_1(x_1, y_1)=F(x, y)$。因而 $-P_{y_1}=\partial F_1/\partial x_1=\partial F/\partial x=-P_y$，$P_{x_1}=\partial F_1/\partial y_1=\partial F/\partial y=P_x$，同时位移 (u, v) 的分量也不变。于是由(4.2)得

$$\varphi_1(z_1)=\varphi(z). \tag{9.2}$$

此外，根据(4.1)，易見必有

$$\mathrm{Re}[\bar{z}_1\varphi_1(z_1)+\psi_1(z_1)]=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)],$$

再将(9.2)代入該式，即得

$$\mathrm{Re}[\psi_1(z_1)]=\mathrm{Re}[\psi(z)+\bar{\alpha}\varphi(z)]. \tag{9.3}$$

因此

$$\psi_1(z_1)=\psi(z)+\bar{\alpha}\varphi(z)+(\text{虛常数}). \tag{9.4}$$

又因附加項中虛常数的存在与否并不影响問題的解，所以可取为零，即有

$$\psi_1(z_1)=\psi(z)+\bar{\alpha}\varphi(z). \tag{9.5}$$

因此复应力函数的变换公式可由 (9.2) 及 (9.5) 表示之。(9.5) 又可改写为如下表达式:

$$\bar{z}_1\varphi_1(z_1)+\psi_1(z_1)=\bar{z}\varphi(z)+\psi(z). \tag{9.6}$$

例 1 在无限平面的一点 $z=\alpha$ 处作用着外力 (X, Y)，求該应力状态的复应力函数。

关于 $z_1=z-\alpha$ 的复应力函数，根据 §8 注 2 可写成下列形式

$$\varphi_1(z_1)=M\log z_1, \qquad \psi_1(z_1)=Nz_1\log z_1,$$

$$M=-\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY), \quad N=\frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY). \tag{9.7}$$

再利用 z_1 与 z 的坐标变换 $z_1=z-\alpha$，换回到原来的坐标系，首先由 (9.2) 有

$$\varphi(z)=\varphi_1(z_1)=M\log(z-\alpha), \tag{9.8}$$

再由 (9.5) 可得

$$\psi(z)=N(z-\alpha)\log(z-\alpha)-\bar{\alpha}M\log(z-\alpha). \tag{9.9}$$

2. 坐标系的旋轉 命坐标系 Oxy 繞原点旋轉 δ 角而变成新坐标系 Ox_1y_1(图 9.2)；令 $z_1=x_1+iy_1$，則

$$z_1=ze^{-i\delta}. \tag{9.10}$$

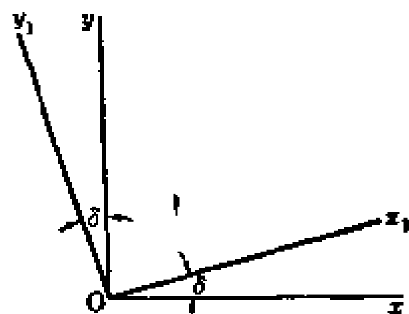


图 9.2

此时 Airy 应力函数也不变，即

$$F_1(x_1, y_1)=F(x, y).$$

由于它的梯度与位移服从同样的向量变換法則，所以由 (4.2) (即 $-P_y+iP_x=\partial F/\partial x+i\partial F/\partial y$) 而有

$$\varphi_1(z_1)=\varphi(z)e^{-i\delta}. \tag{9.11}$$

这一式可写成 $\bar{z}_1\varphi_1(z_1)=\bar{z}\varphi(z)$. 将其代入 (4.1) 即得

$$\psi_1(z_1)=\psi(z). \tag{9.12}$$

因此复应力函数的变换公式可由 (9.11) 及 (9.12) 表示之。

例 2 对 §6 的例 2，假設坐标系旋轉了一个角 $\delta=\frac{\pi}{2}$，求新坐标的复应力函数。

将 (6.10) 和坐标变換式 $z_1=ze^{-i\frac{\pi}{2}}=-iz$ 代入 (9.11) 和 (9.12)，即得

$$\varphi_1(z_1)=-i\varphi(z)=-iCz^2=iCz_1^2,$$

$$\psi_1(z_1)=\psi(z)=Cz^3/3=-iCz_1^3/3.$$

因此在新坐标系中，复应力函数为

$$\varphi_1(z_1)=iCz_1^2,\quad \psi_1(z_1)=-iCz_1^3/3. \tag{9.13}$$

这組函数表示沿着 x_1 軸方向延伸的梁受弯曲时的应力状态。

例 3 求在坐标系旋轉下应力分量的变换公式。

利用 (9.10) ~ (9.12) 的关系式

$$z_1=ze^{-i\delta},\ \varphi_1(z_1)=\varphi(z)e^{-i\delta},\ \psi_1(z_1)=\psi(z),$$

易得

$$\varphi_1'(z_1)=\varphi'(z),\ \varphi_1''(z_1)=\varphi''(z)e^{i\delta},\ \psi_1''(z_1)=\psi''(z)e^{2i\delta}.$$

又利用 $\bar{z}_1=\bar{z}e^{i\delta}$ 和上式即得到

$$\bar{z}_1\varphi_1''(z_1)+\psi_1''(z_1)=\{\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)\}e^{2i\delta}.$$

于是

$$\frac{\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}}{4}+i\frac{E}{4}\tilde{\omega}_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}+i\frac{E}{4}\tilde{\omega}, \tag{9.14}$$

$$\frac{\sigma_{y_1}-\sigma_{x_1}}{2}+i\tau_{x_1y_1}=\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}\right)e^{2i\delta}. \tag{9.15}$$

容易驗証該变换公式和張量分量的变换公式是一致的。

3. 反照变换 对于沿着 x 軸对称的反照变换 (图 9.3)，記新坐标为 (x_1, y_1)，且設 $z_1=x_1+iy_1$，則有

$$z_1=\bar{z}. \tag{9.16}$$

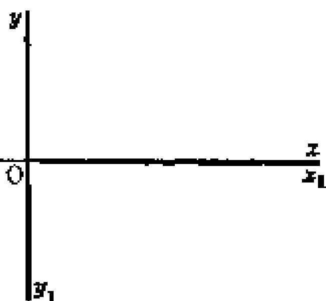


图 9.3

由于在反照变换下右側与左側互换，而力矩的符号也变换正負，故 Airy 应力函数对于反照变换，从它的物理意义可知是不变的。即 $F_1(x_1, y_1)=F(x, y)$❶．从而 $\partial F_1/\partial x_1=\partial F/\partial x$, $\partial F_1/\partial y_1=-\partial F/\partial y$．又位移分量变为 $u_1=u$, $v_1=-v$，所以由 (4.2) 可知

$$\varphi_1(z_1)=\overline{\varphi(z)}. \tag{9.17}$$

于是 $\bar{z}_1\varphi_1(z_1)=\overline{z\varphi(z)}$．因此得 $\mathrm{Re}[\bar{z}_1\varphi_1(z_1)]=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)]$．由此

❶ 也可从关系式 (2.8) 与 (2.9) 先来說明合力 P_x, P_y 的变换关系，然后再利用 (2.13) 来說明 $F_1(x_1, y_1)=F(x, y)$．——校者注

关系及 Airy 应力函数的不变性得 $\mathrm{Re}[\psi_1(z_1)]=\mathrm{Re}[\psi(z)]$。而 $\psi_1(z_1)$ 是 $z_1=\bar{z}$ 的正則函数，所以(取附加虛常数为零时)

$$\psi_1(z_1)=\overline{\psi(z)}. \tag{9.18}$$

因此即得到在反照变换(9.16)下表示复应力函数变换法則的公式(9.17)及(9.18)。

例 4　当位移关于 x 軸对称时，求复应力函数的性质。

因为此时对于 $z_1=\bar{z}$ 的变换，复应力函数必須是不变的，即 $\varphi_1(z_1)=\varphi(z_1)$，$\psi_1(z_1)=\psi(z_1)$。另一方面根据(9.17)和(9.18)，$\varphi_1(z_1)=\bar{\varphi}(\bar{z})$，$\psi_1(z_1)=\bar{\psi}(\bar{z})$。因此必須 $\varphi(\bar{z})=\bar{\varphi}(\bar{z})$，$\psi(\bar{z})=\bar{\psi}(\bar{z})$。这就是

$$\varphi(z)=\bar{\varphi}(z),\quad \psi(z)=\bar{\psi}(z). \tag{9.19}$$

这个条件的另一种說法，就是 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 仅具有实系数(也就是說，它們在实軸上任意点处的 Taylor 展开式仅具有实系数)。

例 5　位移关于原点对称时，求复应力函数的性质。

这相当于坐标系以 $\delta=\pi$ 旋轉而应力函数不变的情形，即 $z_1=-z$ 时，必有

$$\varphi_1(z_1)=\varphi(z_1),\quad \psi_1(z_1)=\psi(z_1).$$

另一方面，在(9.11)，(9.12)內設 $\delta=\pi$，則

$$\varphi_1(z_1)=-\varphi(z),\quad \psi_1(z_1)=\psi(z),$$

所以

$$\varphi(-z)=-\varphi(z),\quad \psi(-z)=\psi(z), \tag{9.20}$$

即 $\varphi(z)$ 必須是奇函数，$\psi(z)$ 是偶函数($\psi'(z)$ 是奇函数)。

由上述三种情形的討論，即得到如下两个結論：

(1)　$\varphi(z)$ 与 $u+iv$ 具有相同的变换法則。

(2)　$\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)$ 对于非反照的变换是不变的，对于反照变换則变成它本身的共軛复数。

这两个結論对于一般坐标变换也成立，因为所有的一般坐标变换都是由这三个基本变换所組成的。

最后关于"量綱"說上几句話。力的量綱用 kg 表示，长度的量綱用 cm 表示；由(4.2)可知 $\varphi(z)$ 的量綱是 kg/cm。由(4.3)可知 $\psi(z)$ 的量綱是 kg。由此可知长度的尺度变动时的变换公式。

§10 周 期 性

若应力状态对于变换

$$z \to z+h \quad (h\text{ 为实数}) \tag{10.1}$$

不变，即沿着 x 軸具有周期 h，則其充要条件是复应力函数具有如下形式的表达式：

$$\varphi(z)=iCz^2+Az+f_1(z), \tag{10.2}$$

$$\psi(z)=\int^z\{-z\varphi'(z)+iCz^2+Bz+f_2(z)\}dz, \tag{10.3}$$

其中 C 是实数，A, B 是复数，$f_1(z)$, $f_2(z)$ 是以 h 为周期的函数。

証明 充分性：假如复应力函数是 (10.2)，(10.3) 的形式，則应力状态有周期 h。

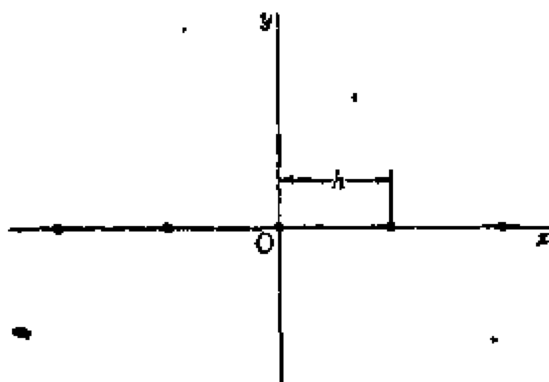


图 10.1

首先由(10.2)易得

$$\varphi(z+h)-\varphi(z)=iC(2hz+h^2)+Ah, \tag{10.4}$$

$$\varphi'(z+h)-\varphi'(z)=iC2h, \tag{10.5}$$

$$\varphi''(z+h)-\varphi''(z)=0. \tag{10.6}$$

再由(10.3)易得

$$\psi'(z+h)-\psi'(z)=-h\varphi'(z)+iCh^2+Bh, \tag{10.7}$$

$$\psi''(z+h)-\psi''(z)=-h\varphi''(z). \tag{10.8}$$

于是由 (10.5) 可知，$(\sigma_x+\sigma_y)/4=\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$❶ 对于变换(10.1)不变。而由(10.6)和(10.8)可知，$(\sigma_y-\sigma_x)/2+i\tau_{xy}=\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)$❶对于变换 (10.1) 也不变。因此即得应力分量 σ_x, σ_y, τ_{xy} 对于变换(10.1)不变。

必要性：假設应力状态对于变换 (10.1) 不变，則复应力函数可写成(10.2)，(10.3)的形式。

由于$(\sigma_x+\sigma_y)/4=\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$ 对于变换(10.1)不变，所以 $\varphi''(z)$ 也必須对于变换(10.1)不变(因为它的实部虚部都可由 $\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$ 的导数給出来)，因

---

❶ 通过这二个关系式将应力分别求出，才可看出应力分量 σ_x, σ_y, τ_{xy} 对于变换(10.1)不变。—— 校者注

此(10.6)成立。将(10.6)积分即得到形同(10.5)的式子，其中积分常数必須是虚数（因为 $\mathrm{Re}[\varphi'(z)]$是不变的）。因此可将它写成 $iC2h$(C 是实数）的形式，从而得到了(10.5)。再将(10.5)积分，即得到(10.4)，其中 A 是复常数。因此由(10.4)知 $\varphi(z)$ 可写成（10.2）的形式，其中 $f_1(z)$对于变换(10.1)是不变的。

另一方面，由于

$$(\sigma_y-\sigma_x)/2+i\tau_{xy}=\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)$$

是不变的，由此导出(10.8)。将它积分并写成（10.7）的形式(B 是复常数)，因此由(10.7)可知 $\psi(z)$能写成(10.3)的形式，其中 $f_2(z)$对于变换(10.1)是不变的。　　　　(証毕)

[注1]　容易知道(10.2)及(10.3)各项的物理意义。即其中 C 项代表均匀弯曲(§9，例1)，A、B 项代表均匀应力状态(§6，例1)，$f_1(z)$及$f_2(z)$项代表在一个周期間的微小变化。

此外，利用对坐标系旋轉角度$\frac{\pi}{2}$(§9)，可以得到沿着 y 軸方向具有周期性的应力状态，它們的复应力函数如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=Cz^2+Az+(\text{周期函数}),\\ \psi(z)&=\int^z\{z\varphi'(z)-Cz^2+Bz+(\text{周期函数})\}dz,\end{aligned}\right\}\qquad(10.9)$$

此处 C 是实数，A，B 是复数。

[注2]　对于具有多圓孔的无限板及带板的拉伸問題，若不从本节的討論出发，有时求不出准确的复应力函数。

§11　各种表达式

对于§4定义的复应力函数，在上面展开了一般理論的討論。但应力函数除我們所处理的方法以外，还有其他各种方法。今将它們和以上所討論的 $\varphi(z)$及 $\psi(z)$間的关系联系起来叙述如下。

1．横田的应力一般式[Yokota, S.: Proc. Tokyo Math-Phys. Soc., 8(1915), 38～50; 机械学会志，18卷38号(大正4年)1～29]　将他的应力函数 $f_1(z)$ 及$f_2(z)$用本书的 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 表示出来，则得

$$f_1(z)=2\varphi'(z),\ f_2(z)=-2\{z\varphi''(z)+\psi''(z)\}. \quad (11.1)$$

又位移公式中的函数 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$ 用我們的記号表示时，則有

$$\varphi_1(z)=\frac{4}{1+\nu}\varphi(z),$$

$$\psi_1(z)=-\frac{i}{2G}\{z\varphi'(z)+\psi'(z)+\varphi(z)\}. \quad (11.2)$$

又在 Love 的著作 [Love, A. E. H.: Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed. (1927), 204～206] 中 §144 的公式里有三个調和函数 ξ, η, f；它們和我們的复应力函数間有如下关系：

$$\xi+i\eta=\frac{4}{1+\nu}\varphi(z),\quad f=-\frac{1}{2G}\mathrm{Re}[z\varphi(z)+\psi(z)]. \quad (11.3)$$

2. Bricas 的一般式 [Bricas, M.: La Théorie de l'Élasticité Bidimensionnelle, 1936] 他用的三个調和函数 Φ, Ψ, f 和我們的 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 間有如下关系：

$$\Phi+i\Psi=\frac{4}{1+\nu}\varphi(z),\quad f=-\frac{1}{2G}\mathrm{Re}[\psi(z)]. \quad (11.4)$$

3. 大久保 [大久保肇：日本机械学会論文集，7(昭和16年)，28号，I-23] 所用的函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\varphi_2(z)$ 在 $k\to 1$ 时和我們的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 間有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{k\to 1}[(k-1)\varphi_1(z)]=-2\varphi'(z),\\&\lim_{k\to 1}[k\varphi_1(z)+\varphi_2(z)]=z\varphi''(z)+\psi''(z).\end{aligned}\right\} \quad (11.5)$$

4. 池田 [池田健：航研报告，19(1943)，249～277] 的一般式里的諸函数，在各向同性的情形和我們的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 間有如下关系：

$$f_1(z)=z\varphi(z)+\psi(z),\quad f_2(z)=-2i\varphi(z); \quad (11.6)$$

$$\phi_1(z)=4\varphi'(z),\qquad \phi_2(z)=-2\{z\varphi''(z)+\psi''(z)\}. \quad (11.7)$$

5. 佐藤 [佐藤常三：平面応力問題の新解析法(1948)] 的 H-

复变函数的理論里，在各向同性的情形所用的函数 $P(z)$ 及 $R(z)$ 与我們的 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 間的关系如下：

$$P(z)=4\varphi'(z),\quad R(z)=z\varphi''(z)+\psi''(z)-2\varphi'(z). \qquad (11.8)$$

且在他的理論里所用函数 b 的力学意义不明；若用他的記号则有 $b=E_x\tilde{\omega}+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\tau/2$，特别在各向同性时用我們的記号写出时則有 $b=E\tilde{\omega}+\tau_{xy}$，此处必須特别加以注意。

6. Wangerin 的解法 [例如最上武雄：2 次元彈性理論（昭和 17 年），216～221] 里的函数 ϕ，ψ 可各設为

$$\phi=\frac{1-\nu}{E}F,\quad \psi=\frac{2}{E}H, \qquad (11.9)$$

但

$$F+iH=\bar{z}\varphi(z)+\psi(z). \qquad (11.10)$$

即 F 及 H 分别是 $\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)$ 的实部及虛部，F 与 Airy 应力函数 (4.1) 一致，H 也是重調和函数，可以叫作“共轭于 F 的重調和函数”。

7. Jeffery [Jeffery, G. B.: Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A 221** (1920), 265] 他在計算位移时引入了一个函数 Q，Q 与 (11.10) 中的 H 有如下关系：

$$Q=\frac{2}{1+\nu}H. \qquad (11.11)$$

他的解法是先确定 Airy 应力函数 F，然后决定函数 Q。而本书的解法是先決定 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$，然后同时确定 F 及 H（或者直接求出位移和应力），我們的方法似乎要好一些。

第3章　应力函数的表达式❶

§12 圆板上的 Taylor 級数展开

若在圆板的边界上受有載荷，我們来考虑求它的应力分布的一般解法。

設圆板的半徑为 a，取圆心为直角坐标系 Oxy 的原点。設 $z=x+iy$，由于載荷在边界上，因此对不論怎样的載荷，复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在圆 $|z|<a$ 内都是单值正則的。因此在 $z=0$ 附近可展成如下的 Taylor 級数：

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n,\quad \psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n. \tag{12.1}$$

这些級数对 $|z|<a$ 收斂，且可逐項微分，即

$$\varphi'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nA_nz^{n-1},\quad \psi'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nB_nz^{n-1}, \tag{12.2}$$

$$\varphi''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)A_nz^{n-2},\quad \psi''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)B_nz^{n-2}. \tag{12.3}$$

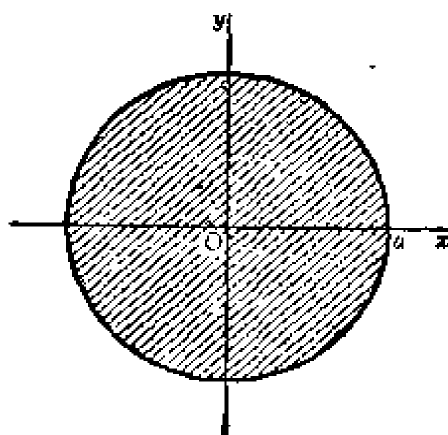


图　12.1

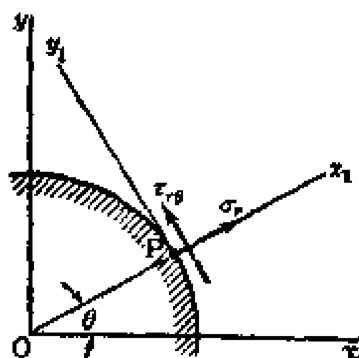


图　12.2

❶ 根据本章内容，似应为“复应力函数的表达式”。——校者注

(12.1)中的系数 A_n, B_n 一般是复数，如果选取它們使問題的边界条件得到满足，則应力状态就完全決定。

假設作为边界条件，已知在边界上各点的徑向应力 σ_r 及切向应力 $\tau_{r\theta}$(图12.2)。为了得到适合这种边界条件的系数，那就必須首先导出应力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 用 $\varphi'(z)$ 及 $\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)$ 表示的表达式。为此，在圓周上任意点 P(半徑 OP 与 x 軸的夹角为 θ)处引入坐标系 Px_1y_1 如图12.2。再用应力的变换公式(9.14)及(9.15)即得

$$\frac{\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}}{4}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}=\mathrm{Re}[\varphi'(z)], \tag{12.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{y_1}-\sigma_{x_1}}{2}+i\tau_{x_1y_1}&=\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}\right)e^{2i\theta}\\&=\{\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)\}e^{2i\theta}.\end{aligned} \tag{12.5}$$

此处 σ_{x_1}, $\tau_{x_1y_1}$ 即分别为 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$，因此由(12.4)的二倍減(12.5)消去 σ_{y_1}，得

$$\sigma_r-i\tau_{r\theta}=2\mathrm{Re}[\varphi'(z)]-\{\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)\}e^{2i\theta}. \tag{12.6}$$

将(12.2)，(12.3)和 $z=ae^{i\theta}$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}\sigma_r-i\tau_{r\theta}&=2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}nA_na^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right]\\&\quad-\left\{ae^{-i\theta}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)A_na^{n-2}e^{i(n-2)\theta}\right.\\&\quad\left.+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)B_na^{n-2}e^{i(n-2)\theta}\right\}e^{2i\theta}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}nA_na^{n-1}e^{i(n-1)\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{A}_na^{n-1}e^{-i(n-1)\theta}\\&\quad-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)A_na^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\\&\quad-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)B_na^{n-2}e^{in\theta}.\end{aligned} \tag{12.7}$$

另一方面，将边界上已知的应力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 展成如下的Fourier級数

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= a_0^{\prime\prime} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\prime\prime} \cos n\theta + b_n^{\prime\prime} \sin n\theta), \\ \tau_{r\theta} &= a_0^{\prime} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\prime} \cos n\theta + b_n^{\prime} \sin n\theta), \end{aligned}\right\} \quad (12.8)$$

将它們結合起来，即得

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta), \quad (12.9)$$

其中 $\bar{a}_n = a_n^{\prime\prime} - ia_n^{\prime}$, $\bar{b}_n = b_n^{\prime\prime} - ib_n^{\prime}$。若将 (12.9) 改写成 (12.7) 的形式，則得

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} e^{in\theta} + \frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} e^{-in\theta} \right). \quad (12.10)$$

再利用 (12.7) 与 (12.10) 中同类項系数相等的关系，即可决定 A_n 和 B_n。为此，先比較常数項，得

$$\bar{a}_0 = A_1 + \bar{A}_1 = 2A_1^{\prime\prime}, \quad (12.11)$$

比較 $e^{i\theta}$ 項，得

$$\frac{\bar{a}_1 - i\bar{b}_1}{2} = 0, \quad (12.12)$$

再比較一般項 $e^{in\theta} (n \geqslant 2)$，得

$$\frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} = (n+1) A_{n+1} a^n - (n+1) n A_{n+1} a^n - n(n-1) B_n a^{n-2} \quad (n \geqslant 2) \quad (12.13)$$

最后比較 $e^{-in\theta} (n \geqslant 1)$ 項，得

$$\frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} = (n+1) \bar{A}_{n+1} a^n \quad (n \geqslant 1). \quad (12.14)$$

由(12.11)可知 $\bar{a}_0$ 为实数，因此解存在的必要条件之一为[注1]

$$a_0^{\prime} = 0. \quad (12.15)$$

于是由 (12.11) 得

$$A_1^{\prime\prime} = a_0^{\prime\prime}/2, \quad (12.16)$$

因此 A_1 的实部就被决定。

其次，由 (12.12) 可导出另外两个解的存在条件，

$$a_1^{\prime\prime} - b_1^{\prime} = 0, \quad a_1^{\prime} + b_1^{\prime\prime} = 0. \quad (12.17)$$

由 (12.14) 可得到决定系数 A_n 的公式

$$A_n=\frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2na^{n-1}}\quad(n\geqslant 2),\tag{12.18}$$

将此値代入(12.13)，即得

$$B_n=-\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2n(n-1)a^{n-2}}-\frac{a_n-ib_n}{2na^{n-2}}\quad(n\geqslant 2).\tag{12.19}$$

另外还有 A_1', A_0, B_0, B_1 (就实数来説是七个)未决定，这由§7的討論得知是当然的事情。因为对于一定的应力状态，它的复应力函数必然要有这样的不确定性(見(7.1))。因此为了簡化，可假設它們为零。也就是在原点 $z=0$ 处設 $\mathrm{Im}\,[\varphi'(z)]$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\psi'(z)$都等于零。

这样地决定了所有系数之后，即可得到如下的复应力函数的表达式:

$$\varphi(z)=\frac{a_0}{2}z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2na^{n-1}}z^n,\tag{12.20}$$

$$\psi(z)=-\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2n(n-1)a^{n-2}}+\frac{a_n-ib_n}{2na^{n-2}}\right\}z^n.\tag{12.21}$$

于是

$$\varphi'(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2a^{n-1}}z^{n-1},\tag{12.22}$$

$$\psi'(z)=-\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2(n-1)a^{n-2}}+\frac{a_n-ib_n}{2a^{n-2}}\right\}z^{n-1},\tag{12.23}$$

$$\varphi''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2a^{n-1}}(n-1)z^{n-2},\tag{12.24}$$

$$\psi''(z)=-\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2a^{n-2}}+\frac{a_n-ib_n}{2a^{n-2}}(n-1)\right\}z^{n-2}.\tag{12.25}$$

对应力采用图 12.3 所示的記号，将它和 (12.22), (12.24), (12.25)以及

$$z=re^{i\theta}\tag{12.26}$$

一并代入变换公式(12.4)和(12.5)，即得

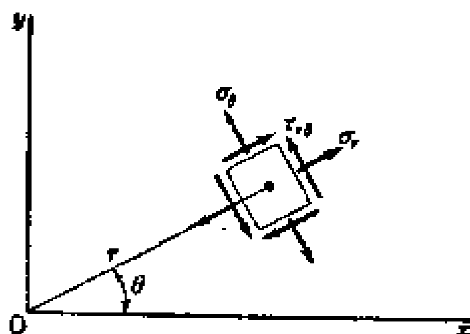


图 12.3

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_r+\sigma_\theta}{4} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{4} = \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\
&= \operatorname{Re}\left[\frac{a_0'}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2a^{n-1}} z^{n-1}\right] \\
&= \frac{a_0'}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \operatorname{Re}[(a_{n-1}-ib_{n-1})e^{i(n-1)\theta}] \\
&= \frac{a_0'}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n} \{(a_n'+b_n')\cos n\theta-(a_n'-b_n')\sin n\theta\},
\end{aligned}
\tag{12.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{2}+i\tau_{r\theta} &= \left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}\right)e^{2i\theta} = \{\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)\}e^{2i\theta} \\
&= \Big[re^{-i\theta}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2a^{n-1}}(n-1)r^{n-2}e^{i(n-2)\theta} \\
&\quad -\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2a^{n-2}}+\frac{a_n-ib_n}{2a^{n-2}}(n-1)\right\}r^{n-2}e^{i(n-2)\theta}\Big]e^{2i\theta} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}(a_n-ib_n)e^{in\theta} \\
&\quad -\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(\bar{a}_n-i\bar{b}_n)+\frac{n-1}{2}(a_n-ib_n)\right\}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}e^{in\theta}.
\end{aligned}
\tag{12.28}
$$

因此易得

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\{(a_n'+b_n')\cos n\theta-(a_n'-b_n')\sin n\theta\} \\
&\quad -\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\Big\{\left(\frac{n}{2}a_n'+\frac{n-2}{2}b_n'\right)\cos n\theta \\
&\quad -\left(\frac{n-2}{2}a_n'-\frac{n}{2}b_n'\right)\sin n\theta\Big\},
\end{aligned}
\tag{12.29}
$$

$$\tau_{r\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\{(a'_n-b'_n)\cos n\theta+(a'_n+b'_n)\sin n\theta\}$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{n-2}{2}a'_n-\frac{n}{2}b'_n\right)\cos n\theta\right.$$
$$\left.+\left(\frac{n}{2}a'_n+\frac{n-2}{2}b'_n\right)\sin n\theta\right\}. \tag{12.30}$$

以2乘(12.27)并分别与(12.29)相加、相减，即得到

$$\sigma_r=a'_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\{(a'_n+b'_n)\cos n\theta-(a'_n-b'_n)\sin n\theta\}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{n}{2}a'_n+\frac{n-2}{2}b'_n\right)\cos n\theta\right.$$
$$\left.-\left(\frac{n-2}{2}a'_n-\frac{n}{2}b'_n\right)\sin n\theta\right\}, \tag{12.31}$$

$$\sigma_\theta=a'_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\{(a'_n+b'_n)\cos n\theta-(a'_n-b'_n)\sin n\theta\}$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{n}{2}a'_n+\frac{n-2}{2}b'_n\right)\cos n\theta\right.$$
$$\left.-\left(\frac{n-2}{2}a'_n-\frac{n}{2}b'_n\right)\sin n\theta\right\}. \tag{12.32}$$

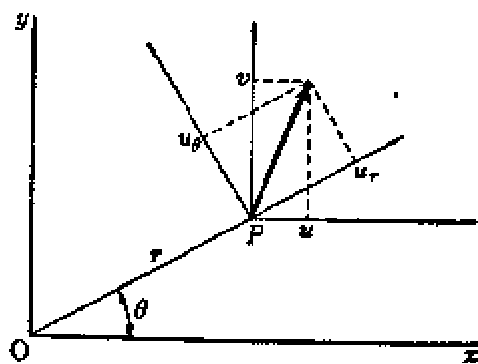


图　12.4

若对于位移采用如图12.4所示的記号，即 u_r 表示徑向位移，u_θ 表示圓的环向位移，則

$$u_r-iu_\theta=(u-iv)e^{i\theta} \tag{12.33}$$

成立。先将(12.20)，(12.22)，(12.23)代入(4.13)，然后将結果代入(12.33)，即得

$$u_r-iu_\theta=\frac{e^{i\theta}}{E}\left[(3-\nu)\left(\frac{a'_0}{2}re^{-i\theta}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\bar{a}_{n-1}+i\bar{b}_{n-1}}{2na^{n-1}}r^{n}e^{-in\theta}\right)\right.$$
$$-(1+\nu)\left\{re^{-i\theta}\left(\frac{a'_0}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n-1}-ib_{n-1}}{2a^{n-1}}r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right)\right.$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2(n-1)a^{n-2}}+\frac{a_n-ib_n}{2a^{n-2}}\right)r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\Big\}\Big]$$

$$=\frac{a}{E}\Big[(1-\nu)a_0^{\cdot}\left(\frac{r}{a}\right)+\left(\frac{r}{a}\right)^2\Big\{\frac{3-\nu}{2}\frac{\bar{a}_1+i\bar{b}_1}{2}e^{-i\theta}-\frac{1+\nu}{2}(a_1-ib_1)e^{i\theta}\Big\}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\Big\{\frac{3-\nu}{2}\frac{\bar{a}_n+i\bar{b}_n}{n+1}e^{-in\theta}-\frac{1+\nu}{2}(a_n-ib_n)e^{in\theta}\Big\}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\frac{1+\nu}{2}\Big\{\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{n-1}+(a_n-ib_n)\Big\}e^{in\theta}\Big]. \tag{12.34}$$

将实部和虚部分开，最后得到

$$u_r=\frac{a}{E}\Big[(1-\nu)a_0^{\cdot}\left(\frac{r}{a}\right)+\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1-3\nu}{4}\{(a_1^{\cdot}+b_1')\cos\theta+(b_1^{\cdot}-a_1')\sin\theta\}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\left(\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{n+1}-\frac{1+\nu}{2}\right)\cdot\{(a_n^{\cdot}+b_n')\cos n\theta+(b_n^{\cdot}-a_n')\sin n\theta\}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\frac{1+\nu}{2}\Big\{\left(\frac{n}{n-1}a_n^{\cdot}+\frac{n-2}{n-1}b_n'\right)\cos n\theta-\left(\frac{n}{n-1}b_n^{\cdot}-\frac{n-2}{n-1}a_n'\right)\sin n\theta\Big\}\Big], \tag{12.35}$$

$$u_\theta=-\frac{a}{E}\Big[\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{5+\nu}{4}\{(b_1^{\cdot}-a_1')\cos\theta-(a_1^{\cdot}+b_1')\sin\theta\}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\left(\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{n+1}+\frac{1+\nu}{2}\right)\cdot\{(b_n^{\cdot}-a_n')\cos n\theta-(a_n^{\cdot}+b_n')\sin n\theta\}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\frac{1+\nu}{2}\Big\{\left(\frac{n}{n-1}a_n^{\cdot}+\frac{n-2}{n-1}b_n'\right)\sin n\theta+\left(\frac{n}{n-1}b_n^{\cdot}-\frac{n-2}{n-1}a_n'\right)\cos n\theta\Big\}\Big]. \tag{12.36}$$

[注 1] 对于問題的解，只有在边界上满足条件(12.15)和(12.17)时才存在。条件(12.15)是表示边界上点的应力对原点的合力矩为零，即

$$\int_0^{2\pi} a\cdot\tau_{r\theta}\, a d\theta=0. \tag{12.37}$$

而条件(12.17)是表示边界上点的合力在 x, y 軸上的分量各为零，即

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta)a\, d\theta=0, \quad \int_0^{2\pi} (\sigma_r \sin\theta+\tau_{r\theta}\cos\theta)a\, d\theta=0. \tag{12.38}$$

[注 2] 当 n 增大时，在应力和位移中与 a_n 和 b_n 相关的項，大致与 $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ 成比例地变化。这就是說，当点由圓的边界向中心变动时，a_n, b_n 将按照这个比例逐漸减少。例如当 $\left(\frac{r}{a}\right)^n=10^{-2}$ 时，即 $\ln\left(\frac{r}{a}\right)=(-2\ln 10)/n=-4.6/n$，亦即 $(a-r)a\approx 4.6/n$。由于边界上載荷的周期为 $2\pi a/n$，若由边界变向內部，而变动的大小約为周期的七成左右时，則其影响仅及于100分之一。

[注 3] 在边界上($r=a$)必有

$$\sigma_\theta=\sigma_r+2\sum_{n=1}^{\infty}(b_n'\cos n\theta-a_n'\sin n\theta), \tag{12.39}$$

根据(12.28)可知，右边的級数是下列級数

$$\tau_{r\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos n\theta+b_n'\sin n\theta) \tag{12.40}$$

的共軛級数。

例 1 假設在边界上受垂直載荷 $\sigma_r=p(\theta)$ 的圓板，求其复应力函数，用 $p(\theta)$ 表示。

由于在边界上已知 $\sigma_r=p(\theta)$ 和 $\tau_{r\theta}=0$，因此(12.8)中的系数可求得为

$$\left.\begin{aligned}&a_0^{\cdot}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)d\theta, \quad a_n^{\cdot}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\cos n\theta\, d\theta,\\ &b_n^{\cdot}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\sin n\theta\, d\theta \quad (n\geqslant 1),\end{aligned}\right\} \tag{12.41}$$

以及 a_n' 和 b_n' 等于零。将它們代入(12.20)即得

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\left\{\frac{z}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{na^{n-1}}e^{-i(n-1)\theta}\right\}d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}p(\theta)\left[-\frac{a}{2\pi}e^{i\theta}\log\left(1-\frac{z}{a}e^{-i\theta}\right)-\frac{z}{4\pi}\right]d\theta.\end{aligned} \tag{12.42}$$

同理由(12.21)得到

$$\psi(z)=\int_0^{2\pi}p(\theta)\left[\frac{a}{2\pi}ze^{-i\theta}\log\left(1-\frac{z}{a}e^{-i\theta}\right)\right]d\theta. \tag{12.43}$$

例 2 在前例中，若仅在边界上 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两点的近傍受有集中压力 P，求在 x 轴上的应力状态(图 12.5)。

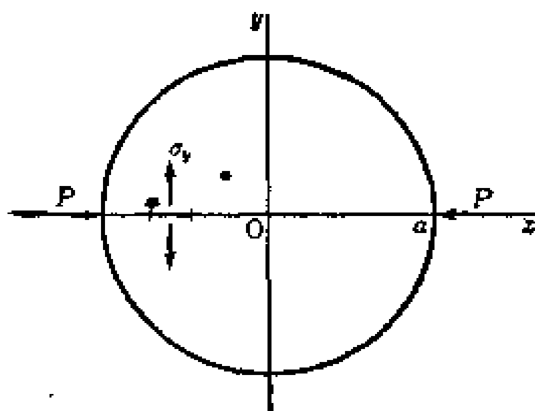


图 12.5

利用前例中的公式 (12.42)，(12.43)，并取这样的 $p(\theta)$，使在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两点近傍积分 $\int p(\theta)\cdot a\,d\theta=-P$，而在其他处为零，即得

$$\varphi(z)=-\frac{P}{a}\left[-\frac{a}{2\pi}\log\left(1-\frac{z}{a}\right)-\frac{z}{4\pi}\right]+\left(-\frac{P}{a}\right)\left[+\frac{a}{2\pi}\log\left(1+\frac{z}{a}\right)-\frac{z}{4\pi}\right]$$

$$=-\frac{P}{a}\left[\frac{a}{2\pi}\left\{\log\left(1+\frac{z}{a}\right)-\log\left(1-\frac{z}{a}\right)\right\}-\frac{z}{2\pi}\right], \tag{12.44}$$

$$\psi(z)=\frac{P}{a}\left[\frac{a}{2\pi}z\left\{\log\left(1+\frac{z}{a}\right)-\log\left(1-\frac{z}{a}\right)\right\}\right]. \tag{12.45}$$

因此

$$\varphi'(z)=-\frac{P}{2\pi a}\frac{2}{1-\dfrac{z^2}{a^2}}+\frac{P}{2\pi a}=\frac{P}{2\pi a}\left[-2\Big/\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)+1\right], \tag{12.46}$$

$$\psi'(z)=\frac{P}{2\pi a}\left[a\left\{\log\left(1+\frac{z}{a}\right)-\log\left(1-\frac{z}{a}\right)\right\}+2z\Big/\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)\right], \tag{12.47}$$

$$\varphi''(z)=-\frac{2P}{\pi a}\frac{z}{a^2}\Big/\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^2, \tag{12.48}$$

$$\psi''(z)=\frac{P}{2\pi a}\left[4\Big/\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)+4\frac{z^2}{a^2}\Big/\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^2\right]=\frac{2P}{\pi a}\Big/\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^2. \tag{12.49}$$

由于在 x 轴上 $z=\bar{z}=x$，故有

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}=\mathrm{Re}[\varphi'(z)]=\frac{P}{2\pi a}\left[-2\Big/\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+1\right], \tag{12.50}$$

$$\frac{\sigma_y-\sigma_x}{4}+i\tau_{xy}=\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)=\frac{2P}{\pi a}\Big/\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right). \tag{12.51}$$

于是

$$\sigma_y=\frac{P}{\pi a}(\text{常数}),\quad \sigma_x=\frac{P}{\pi a}\left\{1-4\Big/\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right\},\quad \tau_{xy}=0. \tag{12.52}$$

在这里有趣的是 x 軸上的力 σ_y 具有均匀的拉力値 $P/\pi a$、利用这个事实在鋼筋混凝土的抗拉試驗中，将圓柱形試件沿水平方向压縮，其拉应力 σ_y 的合力为 $\sigma_y\cdot 2a=(2/\pi)P$，与它平衡的压縮应力集中在直徑两端的近傍(图12.6，参照§15，例1)。

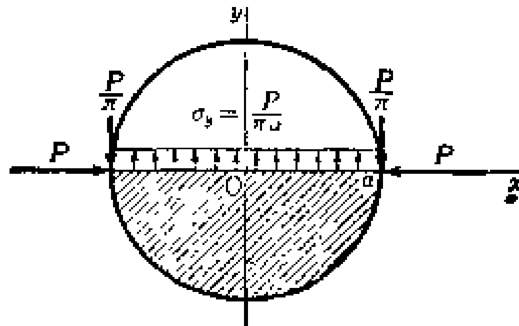


图　12.6

§13 圓环上的 Laurent 級数展开

本节将对半徑为 a 和 $b(a>b)$ 的同心圓所夹的圓环上的应力分布进行討論。

取圓环的中心为直角坐标系 Oxy 的原点(图13.1)。在圓环内的复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 都是 $z=x+iy$ 的多値解析函数。它們的多値性与

$$\varphi_1(z)=Lz\log z+M\log z, \tag{13.1}$$

$$\psi_1(z)=Nz\log z+K\log z \tag{13.2}$$

形式的多値性相同(§8，例1)。其中 L 是实数，M，N，K 是复数，其物理意义如(8.21)所示。因此 $\varphi(z)-\varphi_1(z)$，$\psi(z)-\psi_1(z)$ 在繞圓孔旋轉一周时其値不变，即它們都是单値函数。在圓环内单値正則函数都可展成 Laurent 級数，所以复应力函数可展开成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=Lz\log z+M\log z+\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nz^n,\\ \psi(z)&=Nz\log z+K\log z+\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_nz^n.\end{aligned}\right\}\tag{13.3}$$

利用 (8.19) 可求出其位錯的三个分量。如果圓环內位錯等于零，則

$$L=0,\quad (3-\nu)M+(1+\nu)\bar{N}=0.\tag{13.4}$$

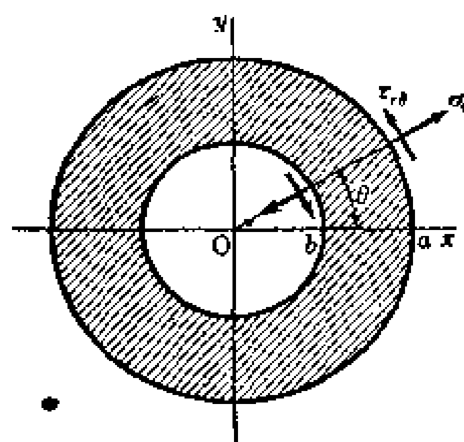


图 13.1

下面再利用边界条件来决定 (13.3)中的系数。将外周界 $z=ae^{i\theta}$ 上的外力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ (图 13.1) 的已知边界条件展成如下級数(参照 (12.9))：

$$\sigma_r-i\tau_{r\theta}=\bar{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n\cos n\theta+\bar{b}_n\sin n\theta).\tag{13.5}$$

同理，将內周界 $z=be^{i\theta}$ 上外力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 的已知边界条件展成如下級数：

$$\sigma_r-i\tau_{r\theta}=\bar{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{c}_n\cos n\theta+\bar{d}_n\sin n\theta).\tag{13.6}$$

将边界条件(13.5) 和 (13.6)結合起来决定(13.3)中的系数。首先将(13.3)微分，代入(12.6)，再令 $z=ae^{i\theta}$，然后与 (13.5) 比較 $e^{i\theta}$ 的同冪項，則得下列各式：

$$2L(\log a+1)+A_1+\bar{A}_1-L+K/a^2=\bar{a}_0,\tag{13.7}$$

$$2A_2a+\bar{M}/a-2A_2a-N/a=(\bar{a}_1-i\bar{b}_1)/2,\tag{13.8}$$

$$\begin{aligned}(n+1)A_{n+1}a^n&-(n-1)\bar{A}_{-n+1}a^{-n}\\&-(n+1)nA_{n+1}a^n-n(n-1)B_na^{n-2}\\&=(\bar{a}_n-i\bar{b}_n)/2\qquad(n\geqslant2),\end{aligned}\tag{13.9}$$

$$M/a+2\bar{A}_2a+M/a-2B_{-1}a^{-3}=(\bar{a}_1+i\bar{b}_1)/2,\tag{13.10}$$

$$-(n-1)A_{-n+1}a^{-n}+(n+1)\bar{A}_{n+1}a^{n}$$
$$-(n-1)nA_{-n+1}a^{-n}-B_{-n}a^{-n-2}$$
$$=(\bar{a}_n+i\bar{b}_n)/2 \quad (n\geqslant 2). \qquad (13.11)$$

同理，利用内周界 $z=be^{i\theta}$ 上的边界条件卽得到

$$2L(\log b+1)+A_1+\bar{A}_1-L+K/b^2=\bar{c}_0, \qquad (13.12)$$
$$\bar{M}/b-N/b=(\bar{c}_1-i\bar{d}_1)/2, \qquad (13.13)$$
$$(n+1)A_{n+1}b^{n}-(n-1)\bar{A}_{-n+1}b^{-n}$$
$$-(n+1)nA_{n+1}b^{n}-n(n-1)B_nb^{n-2}$$
$$=(\bar{c}_n-i\bar{d}_n)/2 \quad (n\geqslant 2), \qquad (13.14)$$
$$2M/b+2\bar{A}_2b-2B_{-1}b^{-3}=(\bar{c}_1+i\bar{d}_1)/2, \qquad (13.15)$$
$$-(n-1)A_{-n+1}b^{-n}+(n+1)\bar{A}_{n+1}b^{n}$$
$$-(n-1)nA_{-n+1}b^{-n}-n(n+1)B_{-n}b^{-n-2}$$
$$=(\bar{c}_n+i\bar{d}_n)/2 \quad (n\geqslant 2). \qquad (13.16)$$

因此再将方程組(13.7)～(13.16)联立，卽可求得系数。但在具体求解之前，必須考虑問題的边界条件是否满足三个解存在的条件，卽載荷的合力及合力矩为零的条件(参照§12注1)。首先比較(13.7)和(13.12)的虛部，得

$$a_0'a^2=c_0'b^2(=-K'). \qquad (13.17)$$

其次由(13.8)和(13.13)，卽得

$$(\bar{a}_1-i\bar{b}_1)a=(\bar{c}_1-i\bar{d}_1)b[=2(\bar{M}-N)]. \qquad (13.18)$$

分解其实部与虛部，就有

$$(a_1'-b_1')a=(c_1'-d_1')b, \quad (a_1'+b_1')a=(c_1'+d_1')b. \quad (13.19)$$

将(13.17)与(13.19)結合起来，卽得知解存在的三个条件被满足。

当在圆环内沒有位錯时，对(13.3)中的系数除了附加項的系数外，其余可由(13.4)及(13.7)～(13.16)决定。首先由(13.4)有 $L=0$，所以由(13.7)，(13.12)得到

$$A_1'=\frac{a^2a_0'-b^2c_0'}{2(a^2-b^2)}, \qquad K'=\frac{a^2b^2(c_0'-a_0')}{a^2-b^2}, \qquad (13.20)$$

K' 已經由(13.17)决定。其次由(13.4)第二式及(13.18)有

$$M=\frac{1+\nu}{8}a(a_1+ib_1),\quad N=-\frac{3-\nu}{8}a(\bar{a}_1-i\bar{b}_1).\qquad(13.21)$$

将 M 的值代入(13.10)及(13.15)即得

$$A_2=\frac{1}{2(a^4-b^4)}\left\{\left(\frac{a_1-ib_1}{2}-\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\bar{a}_1-i\bar{b}_1}{2}\right)a^3\right.$$
$$\left.-\left(\frac{c_1-id_1}{2}-\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\bar{a}_1-i\bar{b}_1}{2}\,\frac{a}{b}\right)b^3\right\},\qquad(13.22)$$

$$B_{-1}=\frac{a^3b^3}{2(a^4-b^4)}\left\{\left(\frac{\bar{a}_1+i\bar{b}_1}{2}-\frac{1+\nu}{2}\,\frac{a_1+ib_1}{2}\right)b\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\bar{c}_1+i\bar{d}_1}{2}-\frac{1+\nu}{2}\,\frac{a_1+ib_1}{2}\,\frac{a}{b}\right)a\right\},\qquad(13.23)$$

再将(13.9)，(13.14)及(13.11)，(13.16)的共軛式联立，即得到对于 $n\geqslant2$ 的所有系数

$$A_{n+1}=\frac{a^{-n}}{\Delta_n}\left\{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2}+\frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1}\,\frac{a_n-ib_n}{2}\right.$$
$$\left.-\lambda^n(1-\lambda^2)\frac{\bar{c}_n-i\bar{d}_n}{2}-\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n-2})}{n+1}\,\frac{c_n-id_n}{2}\right\},$$
$$(13.24)$$

$$A_{-n+1}=\frac{a^n}{\Delta_n}\left\{\frac{\lambda^{2n-2}(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}\,\frac{a_n+ib_n}{2}+\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)\frac{\bar{a}_n+i\bar{b}_n}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda^n(1-\lambda^{2n+2})}{n-1}\,\frac{c_n+id_n}{2}-\lambda^{3n}(1-\lambda^2)\frac{\bar{c}_n+i\bar{d}_n}{2}\right\},$$
$$(13.25)$$

$$B_n=\frac{a^{-n+2}}{\Delta_n}\left\{-\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n(n-1)}\,\frac{\bar{a}_n-i\bar{b}_n}{2}\right.$$
$$-\frac{1-\lambda^{2n}}{n}\,\frac{a_n-ib_n}{2}+\frac{\lambda^n[n^2-(n^2-1)\lambda^2-\lambda^{2n+2}]}{n(n-1)}\,\frac{\bar{c}_n-i\bar{d}_n}{2}$$
$$\left.+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})}{n}\,\frac{c_n-id_n}{2}\right\},\qquad(13.26)$$

$$B_{-n}=\frac{a^{n+2}}{\Delta_n}\left\{-\frac{\lambda^{2n}(1-\lambda^{2n})}{n}\frac{a_n+ib_n}{2}\right.$$
$$-\frac{\lambda^{2n}[(n^2-1)-n^2\lambda^2+\lambda^{2n}]}{n(n+1)}\frac{\bar{a}_n+i\bar{b}_n}{2}+\frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})}{n}$$
$$\left.\cdot\frac{c_n+id_n}{2}-\frac{\lambda^{n+2}[1-n^2\lambda^{2n+2}+(n^2-1)\lambda^{2n}]}{n(n+1)}\frac{\bar{c}_n+i\bar{d}_n}{2}\right\},$$
(13.27)

其中

$$\lambda=b/a,\quad \Delta_n=(1-\lambda^{2n})^2-n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2. \qquad (13.28)$$

在(13.3)的系数中，还有 A_1', A_0, B_1, B_0 未被决定，但它們可由复应力函数的标准化求得(§7)。

例1 設在圓环形截面的柱体上受有外压力 p_1 和内压力 p_2，求其应力分布。

由于在外周界上，已知 $\sigma_r=-p_1$, $\tau_{r\theta}=0$；在内周界上，已知 $\sigma_r=-p_2$, $\tau_{r\theta}=0$．因此在公式(13.5)，(13.6)中的系数有 $a_0=-p_1$, $c_0=-p_2$，其他系数都为零。将它們代入(13.20)即得

$$A_1=\frac{a^2(-p_1)-b^2(-p_2)}{2(a^2-b^2)},\quad K'=\frac{a^2b^2(p_1-p_2)}{a^2-b^2}. \qquad (13.29)$$

同时得其他系数都为零。因此，得到复应力函数为

$$\varphi(z)=-\frac{a^2p_1-b^2p_2}{2(a^2-b^2)}z,\quad \psi(z)=\frac{a^2b^2(p_1-p_2)}{a^2-b^2}\log z. \qquad (13.30)$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\frac{a^2p_1-b^2p_2}{a^2-b^2}+\frac{a^2b^2(p_1-p_2)}{a^2-b^2}\frac{1}{r^2},\\ \sigma_\theta&=-\frac{a^2p_1-b^2p_2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b^2(p_1-p_2)}{a^2-b^2}\frac{1}{r^2},\quad \tau_{r\theta}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (13.31)$$

例2 在例1中圓环的内周界受有均匀切向載荷 τ，在外周界上受有与它維持平衡的切向力时，求应力分布及内外圓周的相对位移。

由于在内周界上已知均匀外力 $\tau_{r\theta}=\tau$，則

$$a_0'=\tau b^2/a^2,\ c_0'=\tau,\ K'=-\tau b^2,\ \varphi(z)=0,\ \psi(z)=-i\tau b^2\log z,$$
$$(\sigma_r+\sigma_\theta)/4=0,\ (\sigma_\theta-\sigma_r)/2+i\tau_{r\theta}=e^{2i\theta}(i\tau b^2/z^2)=i\tau b^2/r^2.$$

所以

$$\sigma_r=\sigma_\theta=0,\quad \tau_{r\theta}=\tau b^2/r^2.$$

同时

$$u_r - iu_\theta = e^{i\theta}/2G\cdot(i\tau b^2/z) = i\tau b^2/2Gr.$$

所以

$$u_r = 0, \quad u_\theta = -\tau b^2/2Gr.$$

因此，在外圆周的环向位移为 $[u_\theta]_{r=a} = -\tau b^2/2Ga$，在内圆周的环向位移为 $[u_\theta]_{r=b} = -\tau b/2G$。于是在内外圆周的环向相对位移为

$$[u_\theta]_{r=b} - [u_\theta]_{r=a} = -(\tau/2G)(a-b)b/a.$$

例 3 設一圆环具有旋轉型位錯$[\bar{\omega}]$(13.2)，求其应力分布。

由 (8.21) 有 $L = E[\bar{\omega}]/8\pi$。将此式代入 (13.7) 及 (13.12)，同时由题意有 $\bar{a}_0 = \bar{c}_0 = 0$，即可求得 A_1' 和 K'，其他的系数都为零。所以复应力函数决定如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{E[\bar{\omega}]}{8\pi}\left\{z\log z - \frac{(a^2-b^2)+2(a^2\log a - b^2\log b)}{2(a^2-b^2)}z\right\},\\ \psi(z) &= \frac{E[\bar{\omega}]}{4\pi}\left(\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\log\frac{a}{b}\right)\log z.\end{aligned}\right\}\quad(13.32)$$

由此，可求得在圆环的切口上的合力为零，合力矩为

$$M_0 = \frac{E}{8\pi}\left\{\frac{a^2-b^2}{2} - \frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}\left(\log\frac{a}{b}\right)^2\right\}[\bar{\omega}], \quad (13.33)$$

此处 M_0 的符号是按照图 13.2 规定的。当圆环切开所張的中心角为 $\bar{\omega}$ 的一个楔形，要想将切口拉攏变成一个封閉的圆环时，就必須在切口上作用一个合力矩为 M_0。

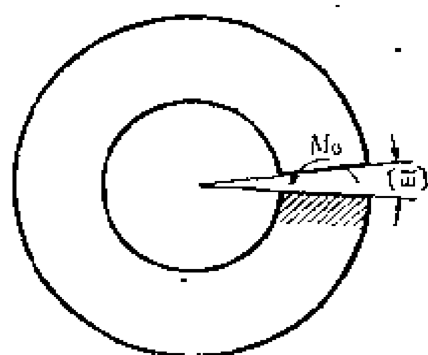


图 13.2

例 4 求具有位移型位錯 $[\xi]$，$[\eta]$ 的圆环的复应力函数。

由 (8.21)，(13.8)，(13.10)，(13.13)，(13.15) 易得

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{E[\eta-i\xi]}{8\pi}\log z - \frac{E[\eta+i\xi]}{8\pi}\frac{z^2}{a^2+b^2},\\ \psi(z) &= \frac{E[\eta+i\xi]}{8\pi}z\log z + \frac{E[\eta-i\xi]}{8\pi}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{1}{z}.\end{aligned}\right\}\quad(13.34)$$

因此可知作用在切口上的合力必通过中心，且它的分量为

$$X = \frac{E}{4\pi}\left(\log\frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)[\xi], \quad Y = \frac{E}{4\pi}\left(\log\frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)[\eta], \quad (13.35)$$

此处 X，Y 的符号按图 13.3 規定的。

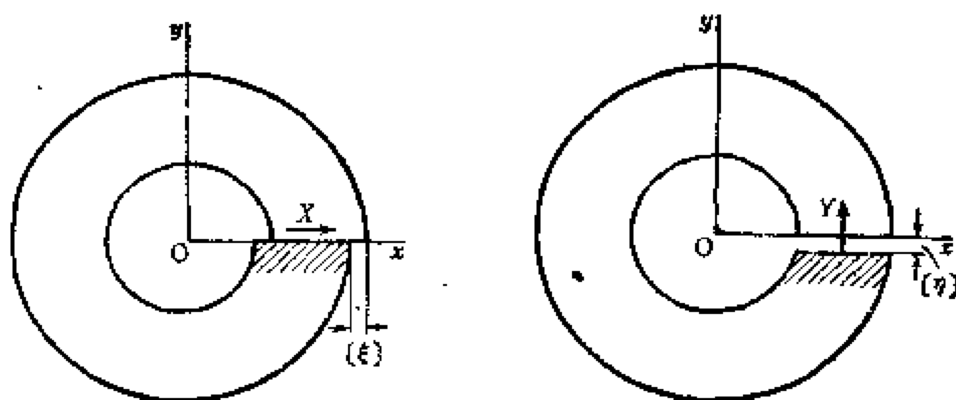


图 13.3

§14 圆孔及孤立奇点

对于带有一个半徑为 b 的圓孔的无限平板，在圆孔上作用着法向載荷 σ_r 及切向載荷 $\tau_{r\theta}$。假定在离开圆孔較远处的区域上几乎不产生应力[注 1]，則可利用 §13 的結果，即有复应力函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的形如(13.3)的表达式。同时由于远处的应力相当地小，所以必有❶ $L=0$，$A_1'=0$，$A_n=0$，$B_n=0(n\geqslant 2)$。将它們代入(13.3)，于是得到該問題的复应力函数的表达式：

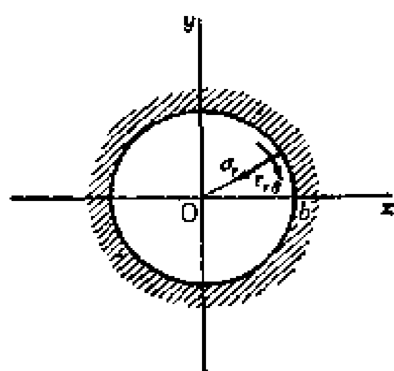


图 14.1

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=M\log z+iA_1'z+A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_{-n}z^{-n},\\ \psi(z)&=Nz\log z+K\log z+B_1z+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_{-n}z^{-n}.\end{aligned}\right\}\quad(14.1)$$

其中 A_1'，A_0，B_1，B_0 与应力无关，而是由应力函数的标准化(§7)所决定，如果仅考虑問題的应力状态，則不妨取它們为零。其次 M，N 的項与合力及位錯有关(§8，例1)。

❶ 此处交代不够消楚，可参看穆斯海里什維里：《数学彈性力学的几个基本問题》一书。——校者注

在圓孔周界 $z=be^{i\theta}$ 上将已知外力的边界条件展成如下級数:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{c}_n \cos n\theta + \bar{d}_n \sin n\theta). \tag{14.2}$$

假設在圓孔周圍沒有位錯,則由(8.19)有

$$(3-\nu)M + (1+\nu)\bar{N} = 0. \tag{14.3}$$

因此,复应力函数变为

$$\varphi(z) = \frac{1+\nu}{8}(c_1+id_1)b\log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{n-1} \frac{c_n+id_n}{2} \frac{1}{z^{n-1}}, \tag{14.4}$$

$$\begin{aligned}\psi(z) = &-\frac{3-\nu}{8}(\bar{c}_1-i\bar{d}_1)bz\log z + \bar{c}_0 b^2 \log z \\ &+ \frac{b^3}{2}\left(\frac{1+\nu}{2}\frac{c_1+id_1}{2} - \frac{\bar{c}_1+i\bar{d}_1}{2}\right)\frac{1}{z} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n+2}}{n}\left\{\frac{c_n+id_n}{2} - \frac{\bar{c}_n+i\bar{d}_n}{2(n+1)}\right\}\frac{1}{z^n}.\end{aligned} \tag{14.5}$$

[注 1] 无限平板实际上并不存在。所謂无限平板只不过是相对于有限平板的一个近似提法。例如前节中圓环区域的外周界半徑 a 很大时,而同时只考慮内周界附近的情况,就不妨取外半徑 $a\to\infty$ 的极限情形。这样可使公式簡化,便于求解。由此所得結果告訴我們,內周界所受載荷的影响隨着远离內周界而逐漸減少。另一方面,当比值 a/b 很大时,在外周所受的載荷对內周界附近的影响很小。仅当逐漸接近外周界时,其影响才显示出来。所以本节的假設是近似地与內周界附近的情形相符,似乎沒有想象"无限"远情形的必要。

例 1 对于具有一个半徑为 b 的圓孔的无限平板,在周界上一点作用着徑向集中压力 P,求其复应力函数(图 14.2)。

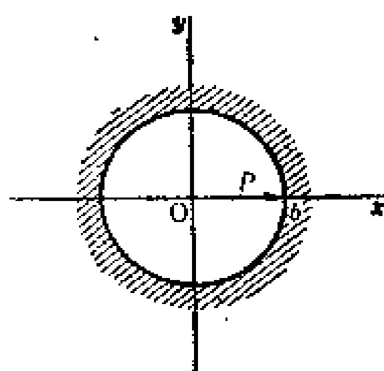


图 14.2

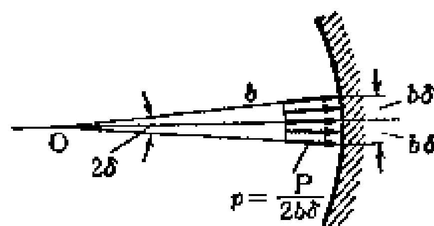


图 14.3

假設把集中压力 P 看作分布在中心角为 2δ（δ 是微小正数）的范圍內的均匀压力，则有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -P/2b\delta & 0 \leqslant |\theta| \leqslant \delta, \\ &= 0 & \delta < |\theta| \leqslant \pi, \\ \tau_{r\theta} &= 0 & 0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi, \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

因此，(14.7)的系数变为

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_r - i\tau_{r\theta})\,d\theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{P}{b}, \\ \bar{c}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_r - i\tau_{r\theta})\cos n\theta\,d\theta = -\frac{1}{\pi}\frac{P}{b\delta}\frac{\sin n\delta}{n} \approx -\frac{1}{\pi}\frac{P}{b}, \\ \bar{d}_r &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_r - i\tau_{r\theta})\sin n\theta\,d\theta = 0 \quad (n \geqslant 1), \end{aligned}\right\} \tag{14.7}$$

将它們代入(14.4)，(14.5)，就得到

$$\varphi(z) = \frac{P}{\pi}\left\{\frac{3-\nu}{8}\log z - \frac{1}{2}\log(z-b)\right\}, \tag{14.8}$$

$$\psi(z) = \frac{P}{\pi}\left\{-\frac{1+\nu}{8}z\log z - \frac{b}{2}\log z + \frac{z}{2}\log(z-b) + \frac{3-\nu}{8}\frac{b^2}{z} + \frac{b}{2}\right\}. \tag{14.9}$$

例2 具有半徑为 b 的自由圓孔的无限平板，在离开圓孔較远处有均匀应力状态，求圓孔附近的应力分布(图 14.4)。

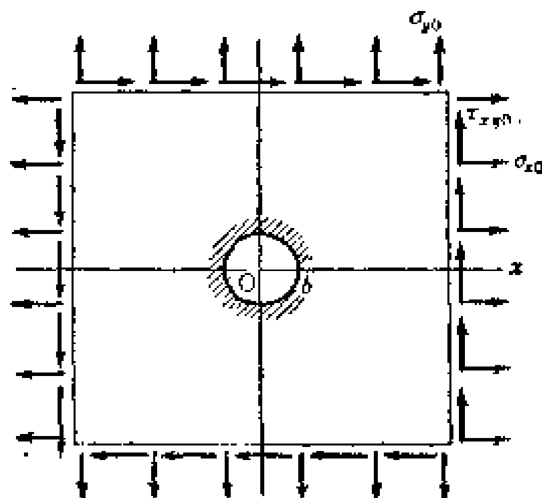


图 14.4

由§6例1可知，表示远处的均匀应力状态的复应力函数为

$$\varphi_0(z) = Az, \quad \psi_0(z) = Bz^2, \tag{14.10}$$

其中，系数 A 和 B 可由远处的均匀应力分量 σ_{x0}，σ_{y0}，τ_{xy0} 决定如下：

$$A=\frac{\sigma_{x0}+\sigma_{y0}}{4},\quad B=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{y0}-\sigma_{x0}}{2}+i\tau_{xy0}\right). \tag{14.11}$$

假設圓孔周圍沒有位錯，則所要求的应力，应該以形如(14.1)中的函数分別加上上面的 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 作为它的复应力函数。这就是說，在(13.3)所表示的复应力函数式中令 $A_1=A$，$A_n=0\ (n\geqslant 2)$，$B_2=B$，$B_n=0\ (n\geqslant 3)$，再使用无位錯的条件而得的結果。这样，M，N 就非满足(14.3)不可。另一方面，利用在圓孔周界上 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 为零的边界条件，由(14.2)可求得 $\bar{c}_0$，$\bar{c}_n$，d_n $(n\geqslant 1)$ 都为零。因此，再利用这些結果，即可决定系数如下：

$$\left.\begin{aligned}&K'=-2Ab^2,\ M=N=0,\ A_{-1}=-2\bar{B}b^2,\ A_{-n}=0\ (n\geqslant 2),\\&B_{-1}=0,\ B_{-2}=\bar{B}b^4,\ B_{-n}=0\ (n\geqslant 3).\end{aligned}\right\} \tag{14.12}$$

于是所求的复应力函数是

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(z)=Az-2\bar{B}b^2/z,\\&\psi(z)=Bz^2-2Ab^2\log z+\bar{B}b^4/z^2,\end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

其中 A，B 是由(14.11)决定的。

由此即得

$$\sigma_r=2A\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)-\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\left(1-3\frac{b^2}{r^2}\right)(2B''\cos 2\theta-2B'\sin 2\theta), \tag{14.14}$$

$$\sigma_\theta=2A\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)+\left(1+3\frac{b^4}{r^4}\right)(2B''\cos 2\theta-2B'\sin 2\theta), \tag{14.15}$$

$$\tau_{r\theta}=\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{b^2}{r^2}\right)(2B'\cos 2\theta+2B''\sin 2\theta). \tag{14.16}$$

[注 2] 应用反照原理，对这个問題求解更簡单(§ 23，例 1)。

对具有圓孔的大平板，在圓孔上受有載荷，如果只需要考虑圓孔附近情況的話，則可利用上述方法求解。但如果需要考虑离开圓孔稍远处的情況，則近似地将圓孔看作一个点，且設在該处有一个孤立点就可以了。当圓孔周圍有位錯时也是同样。假設不是圓孔，而是別的形状的孔，則在离孔稍远处与圓孔的情況差別不大。

这样，在上述意义下，就只要对具有一个孤立奇点的无限平板問題进行研究就够了。为此，取 $z=0$ 为孤立奇点，于是問題就是求在其附近的复应力函数。事实上，它和 § 13 的圓环情形完全一样，只是取内半徑 b 等于零，外半徑 a 趋向 ∞ 即可。然而在(13.3)

右边的 Laurent 級数中，正冪部分是不影响在奇点的状态，而它对离开奇点較远处的状态有影响。因此在奇点附近只要考虑奇点的主要部分

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=Lz\log z+M\log z+\sum_{n=1}^{\infty}A_{-n}z^{-n},\\ \psi(z)&=Nz\log z+K\log z+\sum_{n=1}^{\infty}B_{-n}z^{-n}\end{aligned}\right\}\qquad(14.17)$$

卽可。其中 L 是实数，其余系数都是复数。

假設复应力函数的表达式(14.17)已知，則原点周圍的三个位錯分量可由(8.19)求出，同时在原点作用的外力(X, Y)及合力矩 M_0 可由(8.20)求出。

反之，假設已知在原点周圍的三个位錯分量 $[\tilde{\omega}]$，$[\xi]$，$[\eta]$ 和作用在原点的外力(X, Y)及合力矩 M_0，則(14.17)中的 L, M, N 及 K' 都可由(8.21)决定。然后将(8.21)代入(14.17)，再把所得式子的开始几項分解，就能得到一些有意义的結果。下面分别解释一下各个式子所表示的奇异性。

(1) 旋轉型位錯的中心：

$$\varphi(z)=\frac{E[\tilde{\omega}]}{8\pi}z\log z,\quad\psi(z)=0.\qquad(14.18)$$

(2) 位移型位錯的中心：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{E}{8\pi}[\eta-i\xi]\log z,\\ \psi(z)&=\frac{E}{8\pi}[\eta+i\xi]z\log z.\end{aligned}\right\}\qquad(14.19)$$

(3) 集中力的作用点：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY)\log z,\\ \psi(z)&=\frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY)z\log z.\end{aligned}\right\}\qquad(14.20)$$

(4) 膨脹的中心(参照(14.5)的 $\bar{c}_0$ 項)：

$$\varphi(z)=0, \quad \psi(z)=K \cdot \log z. \tag{14.21}$$

(5) 集中力偶：

$$\varphi(z)=0, \quad \psi(z)=i\frac{M_0}{2\pi}\log z. \tag{14.22}$$

这样，在(14.17)中含有 $\log z$ 的項都得到了名称，至于 z 的負冪的項可統称之为"高阶奇性"。由(14.4)及(14.5)可知高阶奇性对原点附近的应力状态，起主要影响，而这些影响随着远离原点而急遽減小，但是高阶奇性和上列(1)～(5)的几种奇性比較起来是很小的，因此不予考虑。

§ 15 半无限板——第一种 Laplace 积分

所謂半无限板，就是在直綫的一边无限伸展的区域，或者称为半无限平面。它也是用近似的概念来处理的一个弹性力学問題。事实上，在仅需考虑直綫边附近的局部状态，且对离开較远处的影响可以忽略不計的情形就能使用这个概念。首先把較远处的应力与位移都假設为零。如取直綫边为 y 軸，板所存在的一方为 x 軸的正向（图 15.1），則 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 可表示为如下的积分（第一种 Laplace 积分）：

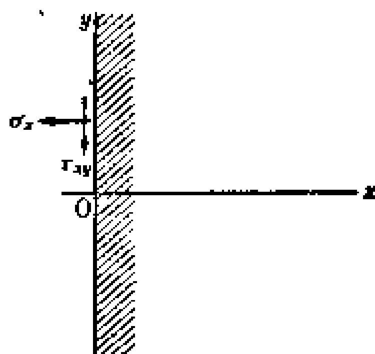


图 15.1

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zt}A(t)dt, \quad \psi(z)=\int_0^\infty e^{-zt}B(t)dt, \tag{15.1}$$

其中 $A(t)$，$B(t)$ 是实变数 t（变域由 0 到 ∞）的复函数。

因此，应力可由下式求出：

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}=\mathrm{Re}[\varphi'(z)]=\mathrm{Re}\left[-\int_0^\infty e^{-zt}tA(t)dt\right], \tag{15.2}$$

$$\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}=\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)$$

$$=\int_0^\infty e^{-zt}\{\bar{z}t^2A(t)+t^2B(t)\}dt. \tag{15.3}$$

特别在直綫边 $z=iy$ 上的 σ_x 及 τ_{xy}，由

$$[\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} = -\int_0^\infty e^{-iyt} tA(t)dt - \int_0^\infty e^{iyt} t\overline{A(t)}dt$$

$$-\int_0^\infty e^{-iyt}\{-iyt^2A(t)+t^2B(t)\}dt \qquad (15.4)$$

所决定。对于右边积分中含有 $e^{-iyt}(-iy)$ 的項施行分部积分，即得

$$\int_0^\infty e^{-iyt}\{-iyt^2A(t)\}dt = \Big[e^{-iyt}t^2A(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-iyt}\frac{d}{dt}\{t^2A(t)\}dt$$

$$(15.5)$$

又因右边第一項为零，于是(15.4)变为

$$[\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} = -\int_0^\infty e^{iyt}t\overline{A(t)}dt - \int_0^\infty e^{-iyt}\Big[tA(t)$$

$$-\frac{d}{dt}\{t^2A(t)\} + t^2B(t)\Big]dt. \qquad (15.6)$$

另外，假設已知直綫边上的垂直外力和切向外力的边界条件。将它們分别展为如下 Fourier 积分：

$$\left.\begin{aligned}[\sigma_x]_{x=0} &= \int_0^\infty \{a(t)'\cos ty + b(t)'\sin ty\}dt,\\ [\tau_{xy}]_{x=0} &= \int_0^\infty \{a(t)'\cos ty + b(t)'\sin ty\}dt.\end{aligned}\right\} \qquad (15.7)$$

因此

$$[\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} = \int_0^\infty \{\overline{a(t)}\cos ty + \overline{b(t)}\sin ty\}dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2}e^{ity} + \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2}e^{-ity}\right\}dt.$$

$$(15.8)$$

再与(15.6)比較，可知有

$$\left.\begin{aligned}&-t\overline{A(t)} = \frac{1}{2}\{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}\},\\ &-tA(t) + \frac{d}{dt}\{t^2A(t)\} - t^2B(t) = \frac{1}{2}\{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}\}.\end{aligned}\right\} \qquad (15.9)$$

由此得

$$A(t)=-\frac{a(t)+i\,b(t)}{2t}, \tag{15.10}$$

$$B(t)=-\frac{\overline{a(t)}+i\,\overline{b(t)}}{2t^2}+\frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\{t^2A(t)\}-\frac{1}{t}A(t)$$

$$=-\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2t^3}-\frac{1}{2t}\frac{d}{dt}\{a(t)+ib(t)\}. \tag{15.11}$$

将此代入(15.1),即得

$$\varphi(z)=-\int_0^\infty e^{-zt}\frac{a(t)+i\,b(t)}{2t}\,dt, \tag{15.12}$$

$$\psi(z)=-\int_0^\infty e^{-zt}\left[\frac{\overline{a(t)}+i\,\overline{b(t)}}{2t^2}+\frac{1}{2t}\frac{d}{dt}\{a(t)+i\,b(t)\}\right]dt. \tag{15.13}$$

因此得到了复应力函数的一般表达式。但这些积分可能在下限 $t=0$ 处发散,为了使积分(15.12)在下限处不发散,必须有

$$a(0)+ib(0)=0. \tag{15.14}$$

另外,由于 $\psi(z)$ 沒有直接的物理意义,所以 (15.13) 的发散与否不太重要,但虽然如此,若

$$\psi'(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\left[\frac{\overline{a(t)}+i\,\overline{b(t)}}{2t}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{a(t)+i\,b(t)\}\right]dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-zt}\left\{\frac{\overline{a(t)}+i\,\overline{b(t)}}{2t}+z\,\frac{a(t)+i\,b(t)}{2}\right\}dt \tag{15.15}$$

发散那就麻煩了。为了使它在下限处不发散,必須有

$$\overline{a(0)}+i\,\overline{b(0)}=0. \tag{15.16}$$

将(15.14)与(15.16)联立,即得

$$a(0)=b(0)=0. \tag{15.17}$$

由于

$$\left.\begin{aligned} a(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty [\sigma_x+i\tau_{xy}]_{x=0}\cos ty\,dy,\\ b(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty [\sigma_x+i\tau_{xy}]_{x=0}\sin ty\,dy,\end{aligned}\right\} \tag{15.18}$$

利用 $a(0)=0$, 从上式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_x dy=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\tau_{xy}dy=0. \tag{15.19}$$

这說明了当 $a(0)=0$ 时，在直綫边上的載荷的合力必須为零。同时 $b(0)=0$ 恒成立。

若(15.19)不成立，設

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma_x+i\tau_{xy}]_{x=0}dy=-X-iY. \tag{15.20}$$

則有

$$a(0)=-\frac{1}{\pi}(X+iY). \tag{15.21}$$

此处(X, Y)是作用在直綫边的載荷的合力。

对于这种情形，有

$$\varphi'(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}\,\frac{a(t)+ib(t)}{2}\,dt, \tag{15.22}$$

$$\psi''(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}\left\{-\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}+\frac{a(t)+ib(t)}{2}-zt\,\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right\}dt, \tag{15.23}$$

現在說明这二个积分对于下限不发散。首先将它們分别加減相同的一个积分項，即有

$$\begin{aligned}\varphi'(z)&=\int_0^{\infty}e^{-zt}\,\frac{a(t)-a(0)+ib(t)}{2}\,dt+\int_0^{\infty}e^{-zt}\,\frac{a(0)}{2}\,dt\\&=\frac{a(0)}{2}\,\frac{1}{z}+\int_0^{\infty}e^{-zt}\,\frac{a(t)-a(0)+ib(t)}{2}\,dt,\end{aligned} \tag{15.24}$$

$$\begin{aligned}\psi''(z)=&-\frac{\overline{a(0)}}{2}\,\frac{1}{z}+\int_0^{\infty}e^{-zt}\left\{-\frac{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}+i\overline{b(t)}}{2}\right.\\&\left.+\frac{a(t)+ib(t)}{2}-zt\,\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right\}dt.\end{aligned} \tag{15.25}$$

再将它們积分，就得到

$$\varphi(z)=\frac{a(0)}{2}\log z-\int_0^{\infty}e^{-zt}\,\frac{a(t)-a(0)+ib(t)}{2t}\,dt, \tag{15.26}$$

$$\begin{aligned}\psi'(z)=&-\frac{\overline{a(0)}}{2}\log z\\&+\int_0^{\infty}e^{-zt}\left\{\frac{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}+i\overline{b(t)}}{2t}+z\,\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right\}dt.\end{aligned} \tag{15.27}$$

这就說明了积分在下限不发散。

位移的表达式可求得如下：

$$u-iv=\frac{3-\nu}{E}\overline{\varphi(z)}-\frac{1+\nu}{E}\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}$$

$$=\frac{3-\nu}{E}\left\{\frac{\overline{a(0)}}{2}\log\bar{z}-\int_0^\infty e^{-\bar{z}t}\frac{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}-i\overline{b(t)}}{2t}dt\right\}$$

$$-\frac{1+\nu}{E}\left[\bar{z}\left\{\frac{a(0)}{2}\frac{1}{z}+\int_0^\infty e^{-zt}\frac{a(t)-a(0)+ib(t)}{2}dt\right\}\right.$$

$$-\frac{\overline{a(0)}}{2}\log z+\int_0^\infty e^{-zt}\left\{\frac{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}+i\overline{b(t)}}{2t}\right.$$

$$\left.\left.+z\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right\}dt\right]. \qquad (15.28)$$

特别在直綫边 $z=iy$ 上，有

$$[u-iv]_{x=0}=\frac{3-\nu}{E}\left\{\frac{\overline{a(0)}}{2}\log(-iy)-\int_0^\infty e^{iyt}\frac{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}-i\overline{b(t)}}{2t}dt\right\}$$

$$-\frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{a(0)}{2}+(-iy)\int_0^\infty e^{-iyt}\frac{a(t)-a(0)+ib(t)}{2}dt\right.$$

$$-\frac{\overline{a(0)}}{2}\log(iy)+\int_0^\infty e^{-iyt}\left\{\frac{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}+i\overline{b(t)}}{2t}\right.$$

$$\left.\left.+iy\frac{a(t)+ib(t)}{2}\right\}dt\right]$$

$$=\frac{2}{E}\overline{a(0)}\log|y|-\frac{1-\nu}{E}\overline{a(0)}\pi i\,\mathrm{sgn}\,y$$

$$-\frac{2}{E}\int_0^\infty\frac{\{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}\}\cos yt+\overline{b(t)}\sin yt}{t}dt$$

$$+i\frac{1-\nu}{E}\int_0^\infty\frac{\overline{b(t)}\cos yt-\{\overline{a(t)}-\overline{a(0)}\}\sin yt}{t}dt, \qquad (15.29)$$

其中 $\mathrm{sgn}\,y$ 表示当 y 为正时它为 $+1$，y 为負时它为 -1，y 为零时它也为零。

例 1 在直綫边上寬度为 $2c$ 的范圍內，受有图 15.2 所示的均匀压力 p，求 x 軸上的应力分布。

在直綫边 $x=0$ 上，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-p \qquad -c<y<c,\\ &=0 \qquad \text{其他},\\ \tau_{xy}&=0 \qquad -\infty<y<\infty,\end{aligned}\right\}\qquad (15.30)$$

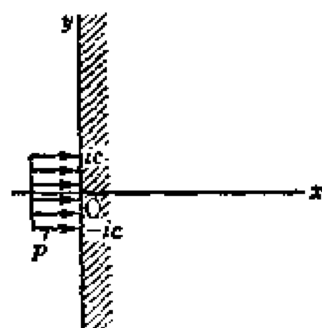


图 15.2

由此，(15.18)变为

$$
\left.\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}(-p)\cos ty\,dy = -\frac{2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t},\\
b(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}(-p)\sin ty\,dy = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15.31}
$$

因此

$$
a(0) = -\frac{2pc}{\pi}, \tag{15.32}
$$

于是(15.22)，(15.23)变成

$$
\begin{aligned}
\varphi'(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\left(-\frac{p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}\right)dt = -\frac{ip}{2\pi}\log\frac{z-ic}{z+ic}\\
&= -\frac{p}{\pi}\arctan\frac{c}{z},
\end{aligned} \tag{15.33}
$$

$$
\psi''(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\frac{pz}{\pi}\sin ct\,dt = \frac{p}{\pi}\frac{cz}{z^2+c^2}. \tag{15.34}
$$

由此可求得在 x 轴上的应力为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{2p}{\pi}\arctan\frac{c}{x} - \frac{2pcx}{\pi(x^2+c^2)},\\
\sigma_y &= -\frac{2p}{\pi}\arctan\frac{c}{x} + \frac{2pcx}{\pi(x^2+c^2)},\\
\tau_{xy} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15.35}
$$

若将此結果用图表示出来，則得图 15.3。

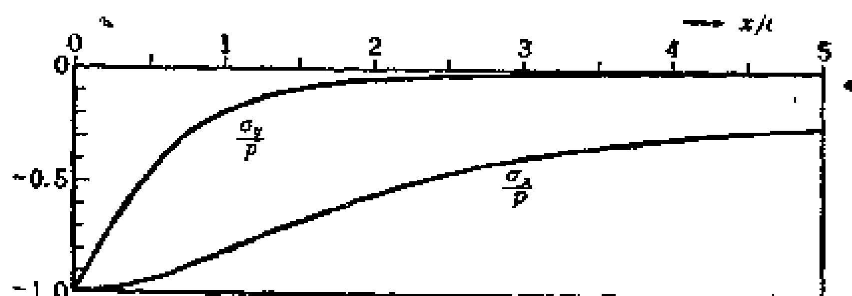


图　15.3

这样的分析一般在自由边上作用着集中載荷时，作为稍微詳細地研究載荷点近傍的情况的典范是有意义的。特别是 x 軸上的 σ_y 到处为负的，其合力为 $-P/\pi$（参照 §12，例2）。

例 2　在前例，$P=2pc$ 保持一定，求 c 趋近于零的极限。

由(15.33)，(15.34)取极限，則得

$$
\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1}{z},\quad \psi''(z) = \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}. \tag{15.36}
$$

§ 16 带状板——第二种 Laplace 积分

"无限长的带状板"这个概念，是对于相当长矩形板的实际問題的一种近似提法。当它受局部載荷时，不考虑其对較远处的影响。

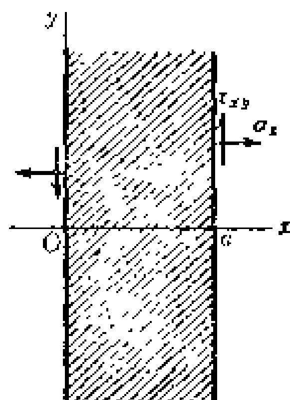


图 16.1

取一个直綫边为 y 軸，即 $x=0$，另一个直綫边为直綫 $x=a$（a 是板宽）。复应力函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 在該带状区域内是单值正則的，在离开受局部載荷較远处非常快地变为零，因此，可表示为第二种 Laplace 积分的形式：

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt}A(t)dt, \quad \psi(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt}B(t)dt, \tag{16.1}$$

其中 $A(t)$ 及 $B(t)$ 一般为复数值。

可用与 (15.2)，(15.3) 同样的方法求出对应于这种情况的应力分量为

$$\begin{aligned}\sigma_x-i\tau_{xy}&=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-\{\bar{z}\varphi''(z)+\psi''(z)\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt}\{-tA(t)-\bar{z}t^2A(t)-t^2B(t)\}dt\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\bar{z}t}\{-t\overline{A(t)}\}dt.\end{aligned} \tag{16.2}$$

在此，对直綫边 $x=0$ 及 $x=a$ 上的載荷 σ_x 及 τ_{xy}，可展成如下表达式：

$$\left.\begin{aligned}[\sigma_x-i\tau_{xy}]_{x=0}&=\int_0^{\infty}\{\overline{a(t)}\cos yt+\overline{b(t)}\sin yt\}dt,\\ [\sigma_x-i\tau_{xy}]_{x=a}&=\int_0^{\infty}\{\overline{c(t)}\cos yt+\overline{d(t)}\sin yt\}dt.\end{aligned}\right\} \tag{16.3}$$

于是用 (16.2) 与 (16.3)，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}\{-tA(t)+iyt^2A(t)-t^2B(t)\}dt+\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt}\{-t\overline{A(t)}\}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\overline{a(t)}-i\overline{b(t)}}{2}e^{iyt}+\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}e^{-iyt}\right\}dt, \qquad (16.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+iy)t}\{-tA(t)-(a-iy)t^2A(t)-t^2B(t)\}dt$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a-iy)t}\{-t\overline{A(t)}\}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\overline{c(t)}-i\overline{d(t)}}{2}e^{iyt}+\frac{\overline{c(t)}+i\overline{d(t)}}{2}e^{-iyt}\right\}dt. \qquad (16.5)$$

将(16.4)，(16.5)❶左边含 iy 的項，利用与(15.5)同样的分部积分法改变形式后，将 $t<0$ 的部分用 $-t$ 代替 t 而作变换，再将积分用下限为零、上限为 ∞ 表示，然后分别比較 e^{iyt} 及 e^{-iyt} 的系数，則得到

$$-t\frac{d}{dt}\{tA(-t)\}-t^2B(t)-t\overline{A(t)}=\frac{\overline{a(t)}-i\overline{b(t)}}{2}, \quad (16.6)$$

$$t\frac{d}{dt}\{tA(t)\}-t^2B(t)+t\overline{A(-t)}=\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}, \quad (16.7)$$

$$e^{at}\left[-2at^2A(-t)-t\frac{d}{dt}\{tA(-t)\}-t^2B(-t)\right]-e^{-at}t\overline{A(t)}$$

$$=\frac{\overline{c(t)}-i\overline{d(t)}}{2}, \qquad (16.8)$$

$$e^{-at}\left[-2at^2A(t)+t\frac{d}{dt}\{tA(t)\}-t^2B(t)\right]+e^{at}t\overline{A(-t)}$$

$$=\frac{\overline{c(t)}+i\overline{d(t)}}{2}. \qquad (16.9)$$

利用該方程組，将 $A(t)$，$\overline{A(-t)}$，$B(t)$，$\overline{B(-t)}$ 解出，再代入(16.1)，即得

❶ 原书誤为(16.6)，(16.7)。——校者注

$$
\begin{aligned}
\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\Big\{&-(1-e^{2at})\frac{a(t)+ib(t)}{2}\\
&+2at\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}+(1-e^{2at})e^{-at}\frac{c(t)+id(t)}{2}\\
&-2ate^{at}\frac{\overline{c(t)}+i\overline{d(t)}}{2}\Big\}dt\\
+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\Big\{&2at\frac{\overline{a(t)}-i\overline{b(t)}}{2}\\
&+(1-e^{-2at})\frac{a(t)-ib(t)}{2}-2ate^{-at}\frac{\overline{c(t)}-i\overline{d(t)}}{2}\\
&-(1-e^{-2at})e^{at}\frac{c(t)-id(t)}{2}\Big\}dt,
\end{aligned}
\tag{16.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\{t\Delta(t)\}dt&+\int_0^\infty e^{zt}\frac{-1}{t}\frac{d}{dt}\{t\Delta(-t)\}dt\\
+\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t^2\Delta(t)}\Big\{&2at\frac{a(t)+ib(t)}{2}\\
&-(1-e^{2at}+4a^2t^2)\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}\\
&-2ate^{-at}\frac{c(t)+id(t)}{2}\\
&-(1-e^{-2at})e^{at}\frac{\overline{c(t)}+i\overline{d(t)}}{2}\Big\}dt\\
+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t^2\Delta(t)}\Big\{&-(1-e^{-2at}+4a^2t^2)\frac{\overline{a(t)}-i\overline{b(t)}}{2}\\
&-2at\frac{a(t)-ib(t)}{2}-(1-e^{2at})e^{-at}\frac{\overline{c(t)}-i\overline{d(t)}}{2}\\
&+2ate^{at}\frac{c(t)-id(t)}{2}\Big\}dt.
\end{aligned}
\tag{16.11}
$$

其中

$$\Delta(t)=(1-e^{2at})(1-e^{-2at})+4a^2t^2=-4(\sinh^2 at-a^2t^2). \tag{16.12}$$

将(16.11)对 z 微分后，再用分部积分法，则得

$$\begin{aligned}
\psi'(z)=&-z\int_0^\infty e^{-zt}tA(t)dt+z\int_0^\infty e^{zt}tA(-t)dt\\
&+\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\Big\{-2at\,\frac{a(t)+ib(t)}{2}\\
&\quad+(1-e^{2at}+4a^2t^2)\frac{\overline{a(t)}+i\overline{b(t)}}{2}\\
&\quad+2ate^{-at}\frac{c(t)+id(t)}{2}\\
&\quad+(1-e^{-2at})e^{at}\frac{\overline{c(t)}+i\overline{d(t)}}{2}\Big\}dt\\
&+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\Big\{-(1-e^{-2at}+4a^2t^2)\frac{\overline{a(t)}-i\overline{b(t)}}{2}\\
&\quad-2at\,\frac{a(t)-ib(t)}{2}-(1-e^{2at})e^{-at}\frac{\overline{c(t)}-i\overline{d(t)}}{2}\\
&\quad+2ate^{at}\frac{c(t)-id(t)}{2}\Big\}dt,
\end{aligned} \tag{16.13}$$

但右边最初的部分很容易看出等于 $z\varphi'(z)$。

为了使(16.10)及(16.13)的积分在 $t=0$ 处不发散，必須和前节同样使載荷滿足几个条件。我們虽不拟作詳細討論，但必須指出，若載荷不是分布得很远，而且构成一个平衡力系，那就可以不必顾虑。在相反的情况下，就必須象(15.26)，(15.27)那样再作討論。

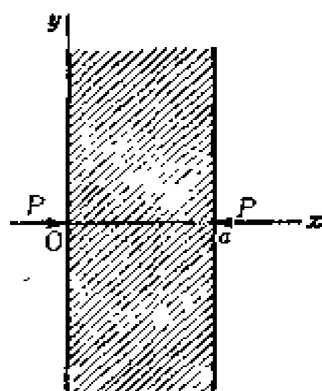


图 16.2

例 若在带状板两側的直綫边上，作用着如图16.2所示的相对集中压力 P，求其应力分布情况。

設想力 P 是按照图15.2那样，在寬度 $2c$ 之間均匀分布(其密度 $p=P/2c$)的，实际計算之，与(15.31)相仿，得到

$$\left.\begin{aligned} a(t)=c(t)&=-\frac{2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t},\\ b(t)=d(t)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{16.14}$$

将这些值代入(16.10)，则有

$$\begin{aligned} \varphi(z)=&\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\left\{-(1-e^{2at})\frac{1-e^{-at}}{2}+2at\frac{1-e^{at}}{2}\right\}\frac{-2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}dt\\ &+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\left\{2at\frac{1-e^{-at}}{2}+(1-e^{-2at})\frac{1-e^{at}}{2}\right\}\\ &\cdot\frac{-2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}dt\\ =&\int_0^\infty\frac{\sinh\dfrac{at}{2}\sinh\left\{\left(z-\dfrac{a}{2}\right)t\right\}}{t(\sinh at+at)}\frac{-2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}dt. \end{aligned} \tag{16.15}$$

再代入(16.13)，则得

$$\begin{aligned} \psi'(z)=z\varphi'(z)&+\int_0^\infty e^{-zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\{-2at(1-e^{-at})+4a^2t^2\\ &\qquad+(1-e^{ct})(e^{at}-e^{-at})\}\frac{-p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}dt\\ &+\int_0^\infty e^{zt}\frac{1}{t\Delta(t)}\{2at(e^{at}-1)-4a^2t^2\\ &\qquad-(e^{at}-e^{-at})(e^{-at}-1)\}\frac{-p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}dt\\ =z\varphi'(z)&+\int_0^\infty\frac{\sinh\dfrac{at}{2}\sinh\left\{\left(z-\dfrac{a}{2}\right)t\right\}+at\sinh zt}{t(\sinh at+at)}\frac{2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}dt. \end{aligned} \tag{16.16}$$

在此，使 $c\to0$，则有

$$\frac{2p}{\pi}\frac{\sin ct}{t}\to\frac{P}{\pi}, \tag{16.17}$$

将(16.17)代入(16.15)，(16.16)可以化简些。特别可求得 x 轴上的 σ_y：

$$\begin{aligned} [\sigma_y]_{y=0}=\frac{2P}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\sinh at+at}&\left[\left(\frac{at}{2}\cosh\frac{at}{2}-\sinh\frac{at}{2}\right)\cosh\left\{\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right\}\right.\\ &\left.-\left(x-\frac{a}{2}\right)t\sinh\frac{at}{2}\sinh\left\{\left(x-\frac{a}{2}\right)t\right\}\right]dt. \end{aligned} \tag{16.18}$$

〔注 1〕 在上例中，問題具有对称性，这时可取对称軸为坐标軸，如图 16.3，因此可取复应力函数为

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\int_0^\infty A(t)\sinh zt\,dt,\\ \psi(z)&=\int_0^\infty B(t)\cosh zt\,dt,\end{aligned}\right\}\qquad(16.19)$$

这样，計算就簡单得多了(参照§9的例4, 5)。

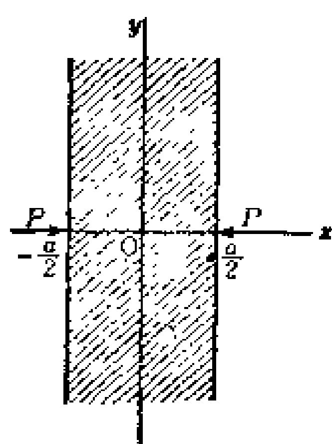


图　16.3

［注2］ 在求(16.18)的值时必須作数值积分。此时，当x接近零及a时积分在上限处收斂得很慢。若考虑范圍$x<a/2$，并利用当$t\to\infty$时下列的近似关系

$$\sinh at+at\approx e^{at}/2,$$

$$\cosh(at/2)\approx e^{at/2}/2,$$

$$\sinh(at/2)\approx e^{at/2}/2,\qquad \cosh\{(x-a/2)t\}\approx e^{(a/2-x)t}/2,$$

$$\sinh\{(x-a/2)t\}\approx -e^{(a/2-x)t}/2,$$

将被积函数中所出現的那些函数予以更换，就可了解被积函数的趋势等于$(xt-1)e^{-xt}/2$. 而从(16.18)的被积函数中減去这个部分，然后再对余項作数值积分，它将收斂得很快。同时这个趋势所表示的部分本身的积分应該等于零。这样計算后就得到图16.3的結果。σ_y在范圍$0<x<a$內恒为正，而与該合力$2P/\pi$恰好平衡的压力集中作用在$x=0$及$x=a$两点上(参照图12.6)。关于这点，Seewald [Abh. Aerodyn. Inst. Aachen, 7 (1927)] 所得出的图是錯誤的。

［注3］ 若带状板的寬度a比載荷分布范圍大得多时，就可按半无限板来处理。反之，若載荷的分布范圍与板的寬度a相差不大，那末就可适用初等材料力学內梁的理論了。[田部貞夫：东大应数，昭和22年毕业論文]

第4章　复参数的应用[1]

§ 17　曲綫坐标与共形映照

和其他平面問題一样，在平面彈性理論中也广泛地应用"曲綫坐标"，但这里用的差不多全部都是等尺度的直交曲綫坐标。也就是說，坐标面和物理面間都是用共形映照的关系相互連結起来的。若設物理面上的复数坐标是 $z=x+iy$，坐标面上的复数坐标（即复参数）是 $\zeta=\xi+i\eta$，則两者通常用如下的关系式：

$$z=Z(\zeta) \tag{17.1}$$

联系着。此处，$Z(\zeta)$ 是 ζ 的解析函数。

对(17.1)微分，得

$$dz=Z'(\zeta)d\zeta。 \tag{17.2}$$

也就是說，物理面上的綫元素 dz 等于对应坐标面上点 ζ 的綫元素 $d\zeta$ 乘以 $Z'(\zeta)$。記 $Z'(\zeta)$ 的絕对值为 J，偏角为 ϕ，因此可将 $Z'(\zeta)$ 表示如下：

$$Z'(\zeta)=Je^{i\phi}。 \tag{17.3}$$

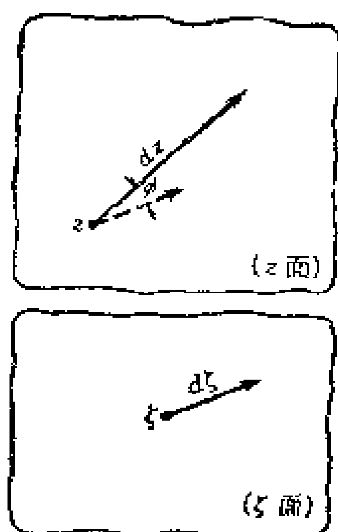


图　17.1

于是我們容易看出，z 面的綫元素 dz 的长度等于对应 ζ 面的綫元素 $d\zeta$ 的 J 倍，而偏角仅增加了 ϕ(图17.1)。J 和 ϕ 是点的函数，但对于同一点的所有綫元素却是相同的。因此 z 面上微小图形与对应的 ζ 面上的图形形状相似而尺寸放大(或縮小) J 倍，同时旋轉了一个角度 ϕ (图17.2)。

設彈性体在物理面上的区域为(D)，在 ζ 面上和它对应的区

[1] 根据本章内容，似应为"共形映照的应用"。——校者注

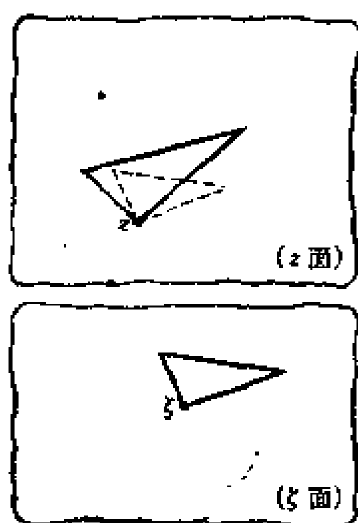


图 17.2

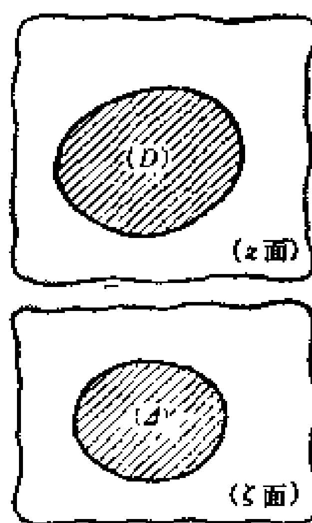


图 17.3

域为(Δ)（图 17.3）。复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在区域(D)内所有点正则。将它們看作 ζ 的函数，則它們对于区域(Δ)内所有点也都正則。用大写字母表示它們如下：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta)&=\varphi(Z(\zeta)),\\ \Psi(\zeta)&=\psi(Z(\zeta)).\end{aligned}\right\}\tag{17.4}$$

今后若将 $\varphi'(z)$ 及 $\varphi''(z)$ 都看作 ζ 的函数时，就分别表示为 $\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)$ 及 $\Phi^{\mathrm{II}}(\zeta)$ 等，即

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)&=\varphi'(Z(\zeta)),\quad &\Phi^{\mathrm{II}}(\zeta)&=\varphi''(Z(\zeta));\\ \Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)&=\psi'(Z(\zeta)),\quad &\Psi^{\mathrm{II}}(\zeta)&=\psi''(Z(\zeta)).\end{aligned}\right\}\tag{17.5}$$

以后，在无特别标明的必要时，将略去参数 ζ．又 $\Phi(\zeta)$ 及 $Z(\zeta)$ 关于 ζ 的微分用“$'$”表示，因此

$$\left.\begin{aligned}\Phi'(\zeta)&=\varphi'(Z(\zeta))\cdot Z'(\zeta)=\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)\cdot Z'(\zeta),\\ \Phi''(\zeta)&=\varphi''(Z(\zeta))\cdot\{Z'(\zeta)\}^2+\varphi'(Z(\zeta))\cdot Z''(\zeta)\\ &=\Phi^{\mathrm{II}}(\zeta)\{Z'(\zeta)\}^2+\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)\cdot Z''(\zeta),\end{aligned}\right\}\tag{17.6}$$

从而

$$\Phi^{\mathrm{I}}=\Phi'/Z',\qquad \Phi^{\mathrm{II}}=\Phi''/Z'^2-\Phi'Z''/Z'^3.\tag{17.7}$$

对于 Ψ^{I}, Ψ^{II} 也成立同样的公式。

在物理面上 z 点的位移及应力分别由(4.10) 及 (4.11)給出。但若将这些公式里的函数 $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$ 等看作 ζ 的函数,那就应該改写成 Φ, Φ^{I}, Φ^{II} 等等,于是公式变成如下形状:

$$u-iv=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\Phi(\zeta)}-\{\overline{Z(\zeta)}\cdot\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)+\Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)\}\right], \quad (17.8)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}=\mathrm{Re}[\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)],\\&\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}=\overline{Z(\zeta)}\cdot\Phi^{\mathrm{II}}(\zeta)+\Psi^{\mathrm{II}}(\zeta).\end{aligned}\right\} \quad (17.9)$$

现在考虑 ζ 面上点 ζ 处坐标軸方向的綫元素 $d\xi$, $d\eta$ 在 z 面上和它們相对应的綫元素为 dz_ξ, dz_η, 其长度分别为 $d\xi$, $d\eta$ 的 J 倍,其方向分别与 x 軸及 y 軸的夹角为 ϕ。因此,可这样选取坐标:即在 z 面上分别取曲綫 η=常数, ξ=常数的切綫方向为局部坐标系(图17.4)。同时在此坐标系下取位移分量为 u_ξ, u_η 及应力分量为 σ_ξ, σ_η, $\tau_{\xi\eta}$ (图17.5),则得

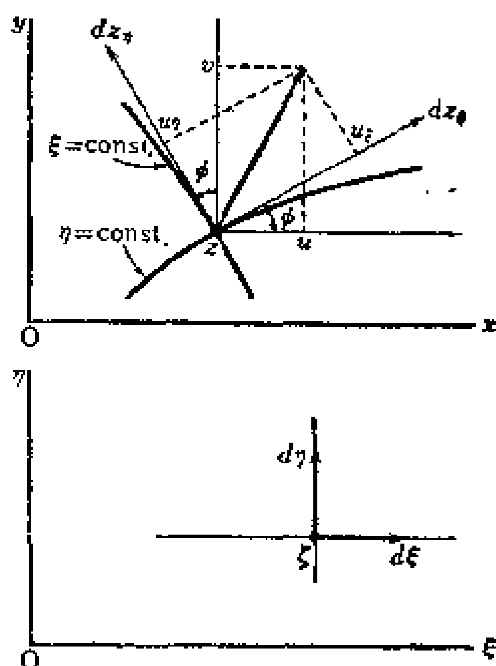


图 17.4

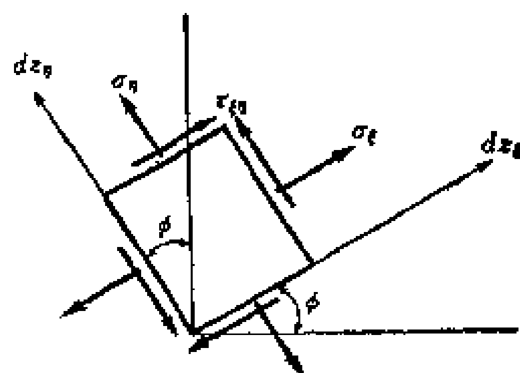


图 17.5

$$u_\xi - iu_\eta = (u - iv)e^{i\phi} = \frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\Phi(\zeta)}\right.$$

$$\left. - \overline{\{\overline{Z(\zeta)}\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta) + \Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)\}}\right]e^{i\phi}, \quad (17.10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{4} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = \mathrm{Re}[\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)], \\ &\frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy}\right)e^{2i\phi} \\ &\qquad = \overline{[Z(\zeta)\cdot\Phi^{\mathrm{II}}(\zeta) + \Psi^{\mathrm{II}}(\zeta)]}e^{2i\phi}. \end{aligned}\right\} \quad (17.11)$$

[注1]　把Airy 应力函数 F 与(11.10)定义的函数 H 都看作参数面上坐标(ξ, η)的函数，则它們就不一定再是重調和函数了，但有如下关系式成立：

$$F + iH = \overline{Z(\zeta)}\Phi(\zeta) + \Psi(\zeta). \quad (17.12)$$

于是可得与(17.10)等价的公式

$$u_\xi = \frac{1}{J}\left(\frac{1-\nu}{E}\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{2}{E}\frac{\partial H}{\partial \eta}\right), \quad u_\eta = \frac{1}{J}\left(\frac{1-\nu}{E}\frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{2}{E}\frac{\partial H}{\partial \xi}\right), \quad (17.13)$$

同时也可推得与(17.11)等价的公式

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{J^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{J^3}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial J}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial J}{\partial \eta}\right), \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{J^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{J^3}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial J}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial J}{\partial \eta}\right), \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{J^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{J^3}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial J}{\partial \xi}\right). \end{aligned}\right\} \quad (17.14)$$

这两組公式我們暫时还用不到。

[注2]　Bricas 的应力，位移的表达式（見前所引过的著作第12章），本质上与(17.10)，(17.11)相同。将他的記号用我們的記号解釋时，只須用如下公式卽可(左边是 Bricas 的記号)：

$$\left.\begin{aligned} &\theta = 4\frac{1-2\nu}{E}\mathrm{Re}[\Phi^{\mathrm{I}}], \quad h = \frac{1}{J}, \quad r^2 = Z\bar{z}, \quad f = -\frac{1+\nu}{E}\mathrm{Re}[\Psi], \\ &\theta + i\theta' = 2\Phi^{\mathrm{I}}, \quad f' = -\mathrm{Re}[\Psi], \quad \Omega + iX = 2\Phi e^{-i\phi}. \end{aligned}\right\} \quad (17.15)$$

但这些式子今后也用不着。

§18　椭圓环

設彈性体的区域(D)是由两个共焦椭圓所圍成的，取焦点的

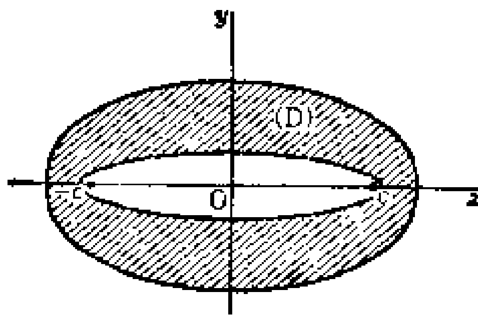


图 18.1

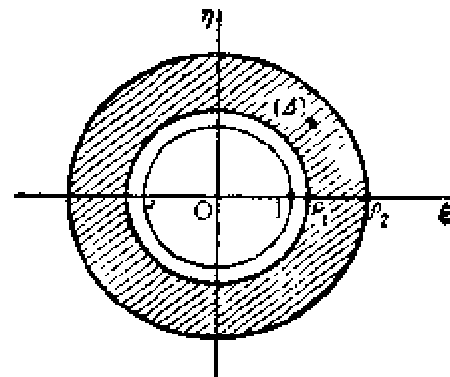


图 18.2

坐标为 $z=\pm c$ (图 18.1)。用 Joukowski 变换

$$z=Z(\zeta)=\frac{c}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{18.1}$$

映照到 ζ 面上时，则 z 面上的区域 (D) 所对应的 ζ 面上的区域 $(\varDelta)$ 是一个圓环区域(图 18.2)

$$\rho_1<|\zeta|<\rho_2. \tag{18.2}$$

将(18.1)微分，得到

$$Je^{i\phi}=Z'(\zeta)=\frac{c}{2}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right). \tag{18.3}$$

将复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 看作 ζ 的函数 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, 它們在区域 $(\varDelta)$ 内都是正則的。而围繞圓孔一周时的多值性与多值函数

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0(\zeta)&=L\cdot Z(\zeta)\log\zeta+M\log\zeta,\\ \Psi_0(\zeta)&=N\cdot Z(\zeta)\log\zeta+K\log\zeta\end{aligned}\right\} \tag{18.4}$$

相同。其中 L 是实数，其余都是复数。$\Phi-\Phi_0$, $\Psi-\Psi_0$ 在圓环区域 $(\varDelta)$ 内是单值正則的，所以可展成 Laurent 級数。因此 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ 的一般表达式为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta)&=L\cdot Z(\zeta)\log\zeta+M\log\zeta+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'A_n\zeta^n,\\ \Psi(\zeta)&=N\cdot Z(\zeta)\log\zeta+K\log\zeta+\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\zeta^n.\end{aligned}\right\} \tag{18.5}$$

因此如果两函数 $\Phi(\zeta)$ 和 $\Psi(\zeta)$ 已知，則对孔周圍的三个位錯分量

可由(8.19)决定。在内圆周所受的合力 (X, Y) 及合力矩可由(8.20)决定，而在外圆周上所受的合力及合力矩与前者大小相等、符号相反。

[注 1] 通常所說的椭圓坐标，就是将上面的 ζ 表示为

$$\zeta = e^{\alpha+i\beta} \tag{18.6}$$

时的(α, β)。利用椭圓坐标，则有

$$z = \frac{c}{2}\left(e^{\alpha+i\beta} + e^{-\alpha-i\beta}\right) = c\cosh(\alpha+i\beta), \tag{18.7}$$

即

$$x = c\cosh\alpha\cos\beta, \qquad y = c\sinh\alpha\sin\beta. \tag{18.8}$$

曲綫 $\alpha=\alpha_0$（常数）是椭圓

$$(x/c\cosh\alpha_0)^2 + (y/c\sinh\alpha_0)^2 = 1, \tag{18.9}$$

曲綫 $\beta=\beta_0$（常数）是双曲綫

$$(x/c\cos\beta_0)^2 - (y/c\sin\beta_0)^2 = 1. \tag{18.10}$$

将(18.6)代入(18.5)就得到椭圓坐标表示的应力函数的表达式。

[注 2] A. Timpe [Math. Zeits. 17 (1923), 189～205] 曾討論过解椭圓环的应力問題的一般方法。他的应力函数可由(18.5)推导出来。在該处含有 L, M, N 的項相当于 Timpe 的“补充解”(Ergänzungslösungen)。他在該論文末尾曾說过：“处理无孔椭圓，椭圓的外区域，及共焦双曲綫所圍成的区域时，除上述方法外不須要其他新的工具了”，这种說法是不正确的。例如对于双曲綫所圍成的区域施用上述映照时，所得的象是在 ζ 面上由两条射綫所圍成的区域，所以(18.5)就不能用了。非用 $\log\zeta=\alpha+i\beta$ 平面上的第二种 Laplace 积分来表示不可。

[注 3] 在(18.2)中，当 $\rho_1=1$, $\rho_2=\infty$ 时，則区域(D)是由无限平面除去一条綫段所构成的。因此对具有一条綫段形切口的相当大的板，以及对具有一条焊接綫段的相当大的板都可如此处理。另一方面，对具有自由椭圓孔的彈性体的簡单应力問題，就須要利用反照原理来解决(参照§24)。

§19 双极坐标

在一般情况下，我們可适当的选取坐标，将綫性分式映照函数

写成如下形式(但将退化情形除外):

$$z=Z(\zeta)=ia\frac{\zeta+1}{\zeta-1}. \tag{19.1}$$

再利用在ζ面上极坐标的关系式

$$\zeta=e^{\alpha+i\beta} \tag{19.2}$$

导入新参数$\alpha+i\beta$，于是

$$z=ia\coth\frac{\alpha+i\beta}{2}=\frac{a\sin\beta+ia\sinh\alpha}{\cosh\alpha-\cos\beta}. \tag{19.3}$$

这个新参数$(\alpha,\ \beta)$就是 G. B. Jeffery [Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 221 (1920)]所用过的双极坐标。

今在$\alpha+i\beta$面上考察带状区域$\alpha_1<\alpha<\alpha_2$。若命其在z面上的对应区域为(D)，则有(图 19.1)

(1) $0<\alpha_1<\alpha_2$时，区域(D)是有偏心圆孔的圆板;

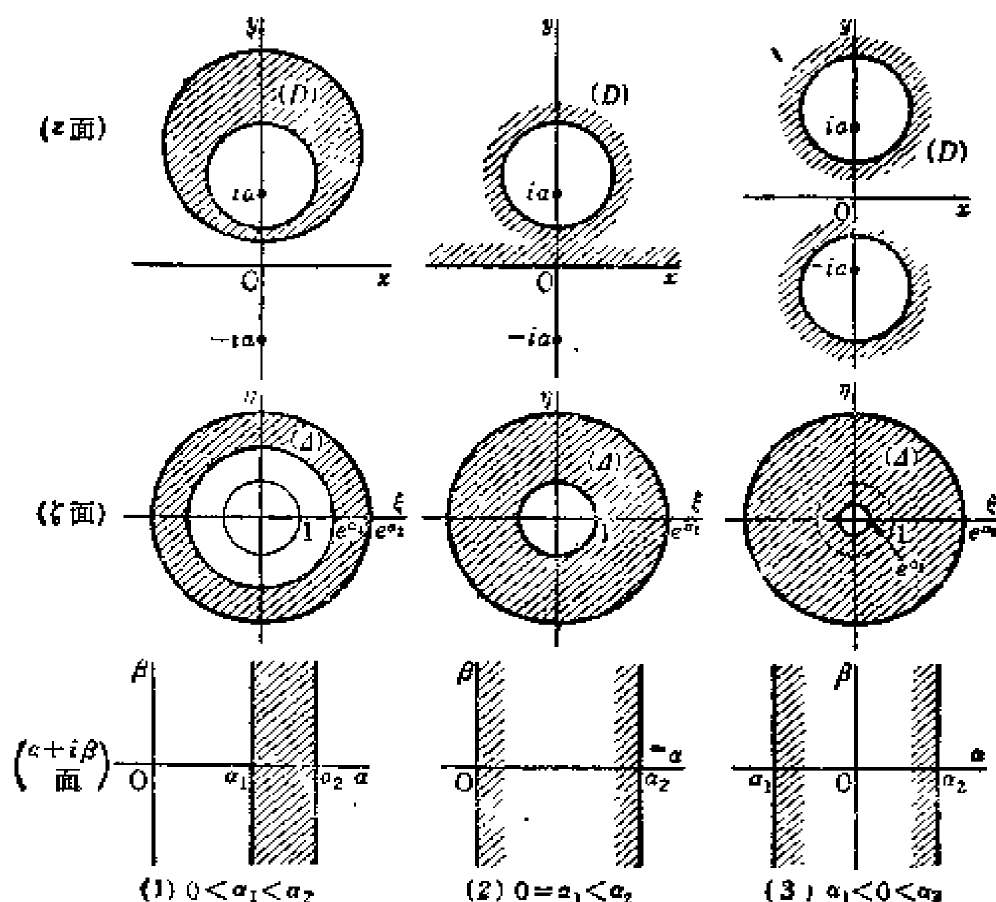


图 19.1

(2) $0=\alpha_1<\alpha_2$ 时，区域(D)是有圆孔的半无限板；

(3) $\alpha_1<0<\alpha_2$ 时，区域(D)是有二圆孔的无限板。

对于每种情形，在 ζ 面上的对应区域(Δ)都是圆环：

$$e^{\alpha_1}<|\zeta|<e^{\alpha_2}.$$

这时，与 $z=\infty$ 相对应的点 $\zeta=1$ 仅在(3)的情况下才包含在区域(Δ)的内部。

因此，在推导区域(D)中的正則复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 的表达式时，有必要分别考虑(1)，(2)的情形和(3)的情形。在(1)，(2)的情形，将 $\varphi(z)$，$\psi(z)$看作仅为ζ的函数 $\Phi(\zeta)$，$\Psi(\zeta)$时，它們在圆形域(Δ)中是正則的，所以它們的表达式可用和前节完全同样方法求出，有(18.5)的形式(但在此我們将用(19.1)当作 $Z(\zeta)$)，式中的系数 L, M, N, K 完全照样由(8.19)，(8.20)决定。

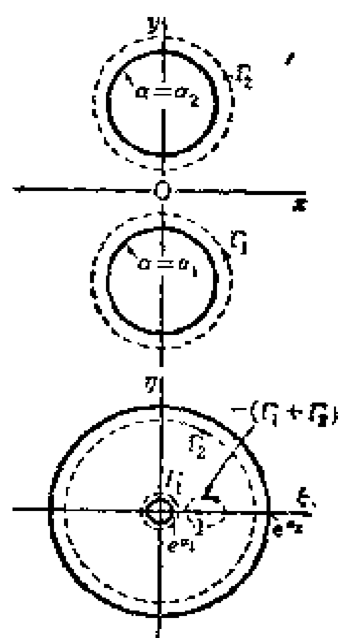


图 19.2

在(3)的情形，区域(Δ)中含有与 $z=\infty$ 对应的点 $\zeta=1$ (在一般情形)，所以有必要考虑其周圍的多值性。今記以正方向繞着 $|\zeta|=e^{\alpha_1}$ 所对应的边界綫一周(在 Z 面上)而成的圍道为 Γ_1，以正方向繞着 $|\zeta|=e^{\alpha_2}$ 所对应的边界綫(在 z 面上)一周而成的圍道为 Γ_2。在ζ面上，它們对应的都是在圓环(Δ)内圍繞内孔一周的圍道。不过 Γ_1 所对应的是不包含点 $\zeta=1$ 正向繞孔一周的圍道，而 Γ_2 所对应的是包含点 $\zeta=1$ 負向繞孔一周的圍道(图 19.2)。于是，以正方向圍繞点 $\zeta=1$ 一周的圍道对应于 z 面上同倫于 $-(\Gamma_1+\Gamma_2)$ 的圍道。

設用公式(8.15)对圍道 Γ_1 及 Γ_2 所确定的四个常数分别为 L_1, M_1, N_1, K_1 及 L_2, M_2, N_2, K_2，则 $\Phi(\zeta)$ 及 $\Psi(\zeta)$ 在区域(Δ)

中的多值性分别与函数

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0(\zeta) &= L_1 Z(\zeta)\log\zeta + M_1\log\zeta - (L_1+L_2)\\&\quad\cdot Z(\zeta)\log(\zeta-1) - (M_1+M_2)\log(\zeta-1),\\\Psi_0(\zeta) &= N_1 Z(\zeta)\log\zeta + K_1\log\zeta - (N_1+N_2)\\&\quad\cdot Z(\zeta)\log(\zeta-1) - (K_1+K_2)\log(\zeta-1)\end{aligned}\right\}\quad(19.4)$$

的多值性相同。于是，$\Phi(\zeta)-\Phi_0(\zeta)$，$\Psi(\zeta)-\Psi_0(\zeta)$除去点$\zeta=1$外在区域(4)内是单値正則的，但$\zeta=1$是孤立奇点，因此，它們在奇点的主部可展为如下的負冪級数：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta)-\Phi_0(\zeta) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(\zeta-1)^{-n},\\\Psi(\zeta)-\Psi_0(\zeta) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n}(\zeta-1)^{-n}.\end{aligned}\right\}\qquad(19.5)$$

再从函数中减去它們，所得的余式在圓环域(4)中也都是单値正則的，所以可将它們展成ζ的 Laurent 級数。最后，概括起来，$\Phi(\zeta)$，$\Psi(\zeta)$可表示为如下表达式：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \Phi_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(\zeta-1)^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\zeta^n,\\\Psi(\zeta) &= \Psi_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n}(\zeta-1)^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\zeta^n.\end{aligned}\right\}\quad(19.6)$$

若假設离开載荷較远处的应力为零，則有关$(\zeta-1)$的負冪項就不存在。若对于Γ_1和Γ_2的位錯及合力为零，則$\Phi_0(\zeta)$，$\Psi_0(\zeta)$中所含的系数 L_1，L_2，M_1，M_2，N_1，N_2 都等于零，而仅余下含K_1，K_2的項。若再設Γ_1及Γ_2的合力矩为零，則K_1'，K_2'也都等于零。最后只剩下K_1''，K_2''。

[注 1] 由上面导出的复应力函数表达式，可求出 Airy 应力函数，再将$\zeta=e^{\alpha+i\beta}$代入，加以整理就得到 Jeffery 所得到的表达式。在他的論文中有些部分的来龙去脉确实不够清楚。但若按照本节的处理，就显得比較清楚。

在处理这类問題时，如果仅考虑边界上的应力而不注意孔的周圍存在着位錯情况，則所求得的解，往往会发生錯誤[参照 小野鑑正，东大一工紀

题，**23** (1943) 中的注意]。利用本节所采用的表达式求解，就不会发生这种现象，因为这里必須考虑所有边界条件才能决定表达式的所有系数。利用双极坐标解弹性問题，鵜戸口在这方面作了一些工作[日本机械學会論文集，**13** (1947)，17 及其他]。

[注 2] 双极坐标应用的另一种类型，即具有圆弧切欠的半无限板的拉伸的例子[石桥正，九大工紀要，9 (1940)，131]。在該处若引用我們的記号，$0<\beta<\beta_1(<\pi)$ 这样的带状域(Δ)对应于物理面的区域(D)，其一般解不取級数形式，可用 Laplace 积分表示出来(参照 § 16)。

§ 20 楔　形　域

对于如图 20.1 所示的楔形彈性体的区域(D)利用关系式

$$z=e^{\zeta},\tag{20.1}$$

则将区域(D)映照到 ζ 面上的带状区域(Δ)：$|\eta|<\eta_1(<\pi)$。此时

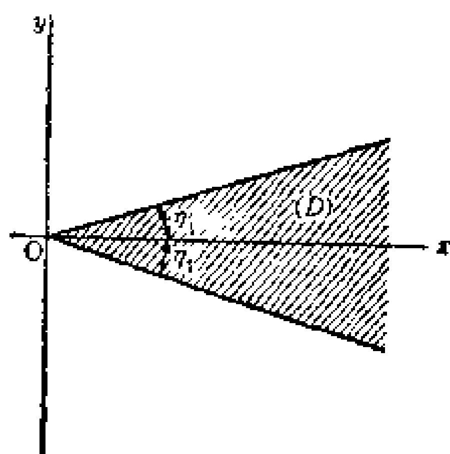


图　20.1

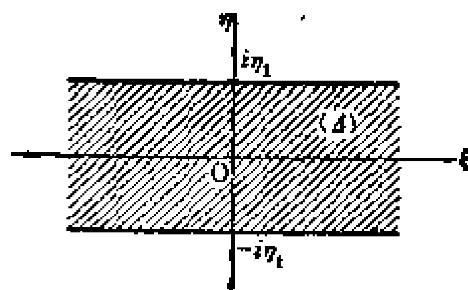


图　20.2

和 § 16 的情形不同，是向左右延长的带状区域(图 20.2)。所以必須用 Fourier 积分

$$\Phi(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\zeta}A(\omega)d\omega,\ \text{等等}\tag{20.2}$$

代替 Laplace 积分。而且为了便于配合边界条件，可以設

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta)&=e^{\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\zeta}A(\omega)d\omega,\\ \Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)&=e^{\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\zeta}B(\omega)d\omega.\end{aligned}\right\}\tag{20.3}$$

[注 1] W. M. Shepherd [Proc. Roy. Soc. London, **A148**(1935), 284] 的解法和用(20.3)的解法相同。

[注 2] Timoshenko [Theory of Elasticity (1934), 121] 将相当于我們在 §13 对于圓环导出的表达式应用到楔形域的情形。但这决不能說我們的結果是具有"一般性"的，而似乎还应該有比(20.3)实用上更广泛更重要的表达式，但这方面的討論还未曾見到。

第5章　反照原理

§21　用反照原理作解析开拓❶

关于复函数的解析开拓，除了利用 Taylor 級数方法来进行外，还有以反照原理为基础的方法。在这种方法中，經常要用到 Schwarz 的定理。

定理 1　設函数 $f(z)$ 在区域 (D) 内正则，假如 (D) 的边界的一部分是实軸上的一直綫段 L，在 $(D)+L$ 上 $f(z)$ 是連續的，并且在 L 上取实数值。設 (D^*) 是区域 (D) 关于实軸的反照映象，因而它們关于实軸是对称的，则函数 $f(z)$ 可以越过 L 解析开拓到 (D^*) 中，即得到在 $(D)+(D^*)+L$ 中解析的函数，而且当 $z\in(D^*)$ 时，解析开拓函数为 $\overline{f(\bar{z})}$。

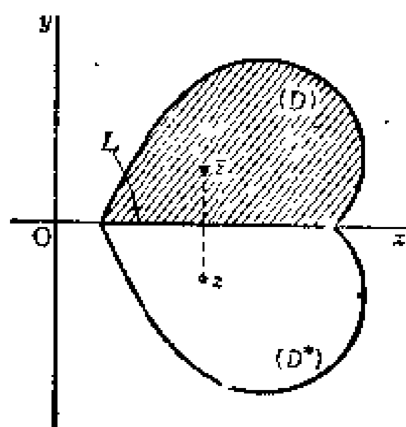


图　21.1

説明　由于函数元素 $\overline{f(\bar{z})}$ 是在函数元素 $f(z)$ 中先把 z 换成 $\bar{z}$，而后对其全体取共軛数而得的結果，因此它可以这样作，即在 $f(z)$ 中仍取变数为 z，而将其系数换成对应的共軛数即可。对于在区域 (D) 内以 C 为中心的函数元素 $f(z)$，通过上述手續所得到的共軛的函数元素将为以 $\bar{C}$ 为中心并具有相同收斂半徑的元素。把这样定义的解析函数記作 $\bar{f}(z)$。于是，定理 1 的内容就是說，$f(z)$ 越过 L 到区域 (D^*) 中的解析开拓与 $\bar{f}(z)$ 一致。形式上来說，在 L 上由于 $z=\bar{z}$，$f(z)=\bar{f}(z)$，因此在 (D^*) 内可以导出 $f(z)=\bar{f}(z)$。利用 Painlevé 定理容易証明这一事实。

此定理又可推广如下[森口，数学，2(1950)，267]：

---

❶　本节在叙述上已作过修改，与原书略有出入。——校者注

定理 2 設函数 $f(z)$, $g(z)$ 在区域(D)内是正則的，假如(D)的边界的一部分是实軸上的一直綫段 L，設(D^*)和(D)关于实軸是对称的，在 $(D)+L$ 上 $f(z)$, $g(z)$ 是連續的，并且在 L 上滿足 $f(z)=\overline{g(z)}$，則函数 $f(z)$, $g(z)$ 可以越过 L 解析开拓到 (D^*) 中。于是当 $z\in(D^*)$ 时，即有

$$f(z)=\overline{g(\bar{z})},\quad g(z)=\overline{f(\bar{z})}.$$

事实上，由于在 L 上有 $f(z)=\bar{g}(\bar{z})$, $g(z)=\bar{f}(\bar{z})$, $\bar{z}=z$ 成立，所以推出在区域(D^*)内也有关系 $f(z)=\bar{g}(z)$, $g(z)=\bar{f}(z)$ 成立。其証明完全和定理 1 相同。

我們知道，定理 1 可以推广到不是直綫段而是圓弧的情形；与此同样，定理 2 也可推广，即

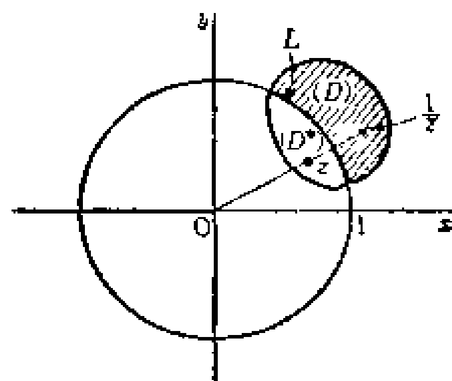


图 21.2

定理 3 設区域(D)的一部分边界是单位圓周的一段圓弧 L，并且(D)落在 L 的一側(图21.2)。再設函数 $f(z)$, $g(z)$ 在(D)内正則，在 L 上連續且滿足关系 $f(z)=\overline{g(z)}$。若以(D^*)表示区域(D)关于单位圓周的反照映象，則 $f(z)$, $g(z)$ 可以越过 L 解析开拓到(D^*)中。又若設 $z\in(D^*)$，z 的反照点为 $1/\bar{z}$，則函数开拓后的值，可由下式导出：

$$f(z)=\overline{g(1/\bar{z})},\quad g(z)=\overline{f(1/\bar{z})}.$$

在此情形，可由在 L 上的关系 $f(z)=\bar{g}(\bar{z})$, $g(z)=\bar{f}(\bar{z})$, $\bar{z}=1/z$，推出在(D^*)内成立的关系 $f(z)=\bar{g}(1/z)$, $g(z)=\bar{f}(1/z)$.

§22 对于实軸的反照

設彈性体的区域(D)落在实軸的一側，并以实軸上的一直綫段 L 为部分边界(图21.1)。下面将分别以綫段 L 为自由边界、固定边界和滑动边界三种情形来討論复应力函数越过 L 的解析开拓。

1. 自由边界情形　这时复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在区域 (D) 內正則，在綫段 L 上連續。当将基准点 A(§7) 取在 L 上，則由 (4.14) 可知自由边界的条件为

$$\text{在 } L \text{ 上，}\qquad \overline{\varphi(z)}+\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}=0. \tag{22.1}$$

在此再引入一个輔助函数 $\chi(z)$

$$\chi(z)=z\varphi'(z)+\psi'(z), \tag{22.2}$$

則 $\chi(z)$ 在 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 的正則点也是正則的。反之，在 $\varphi(z)$, $\chi(z)$ 的正則点 $\psi(z)$ 也是正則的。利用这个事实，并考虑到

$$\text{在 } L \text{ 上，}\qquad \bar{z}=z, \tag{22.3}$$

則得

$$\text{在 } L \text{ 上，}\qquad \overline{\varphi(z)}=-\chi(z). \tag{22.4}$$

假設区域(D^*)和(D)关于实軸对称，因此由定理 2 卽得到当 $z\in(D^*)$ 时，有解析开拓

$$\varphi(z)=-\bar{\chi}(z),\quad \chi(z)=-\bar{\varphi}(z). \tag{22.5}$$

2. 固定边界情形　由 (4.13) 知其条件为

$$\text{在 } L \text{ 上，}\qquad \frac{3-\nu}{1+\nu}\bar{\varphi}(\bar{z})-\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}=0. \tag{22.6}$$

由此与上面同理，可推出解析开拓的定义式：

$$\varphi(z)=\frac{1+\nu}{3-\nu}\bar{\chi}(z),\quad \chi(z)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\bar{\varphi}(z). \tag{22.7}$$

3. 滑动边界情形　就是在垂直于 L 的方向沒有位移，切綫方向沒有外力，而允許沿 x 方向的位移任意移动。用記号表示，便是

$$\text{在 } L \text{ 上，}\qquad v=0,\quad P_x=0.$$

由 (4.13), (4.14), 其条件可写为

$$\text{在 } L \text{ 上，}\qquad \frac{3-\nu}{1+\nu}\bar{\varphi}(\bar{z})-\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}$$
$$=\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi(z)-\{z\bar{\varphi}'(\bar{z})+\bar{\psi}'(\bar{z})\}. \tag{22.8}$$

在 L 上，

$$\bar{\varphi}(\bar{z})+\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}=\varphi(z)+\{z\bar{\varphi}'(\bar{z})+\bar{\psi}'(\bar{z})\}. \quad (22.9)$$

由此即得到

$$\text{在 } L \text{ 上}, \qquad \varphi(z)=\bar{\varphi}(z), \quad \chi(z)=\bar{\chi}(z).$$

因此再利用定理1可导出解析开拓

$$\varphi(z)=\bar{\varphi}(z), \quad \chi(z)=\bar{\chi}(z). \quad (22.10)$$

例 在半无限板内的一点作用着集中力(图 22.1)。

設在占有半平面 $y>0$ 的半无限板内的一点 $(z=ib)$ 作用着集中力 (X, Y)，且直綫边界 $y=0$ 是自由的。

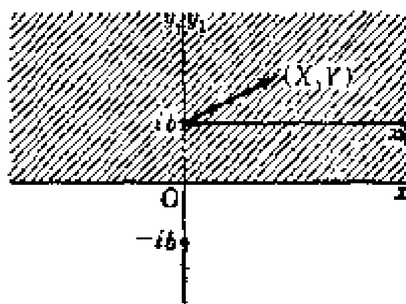


图 22.1

复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在 $z=ib$ 具有孤立奇点。为了求該点的主部，施行坐标变换 $z_1=z-ib$ (图 22.1)，对于新坐标系的复应力函数記为 $\varphi_1(z_1)$，$\psi_1(z_1)$，它們在 $z_1=0$ 有孤立奇点，其主部为(§14)

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z_1)&\approx-\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY)\log z_1,\\ \psi_1(z_1)&\approx\frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY)z_1\log z_1.\end{aligned}\right\} \quad (22.11)$$

由此可得 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在 $z=ib$ 的主部如下(§9，(1))：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(z)\approx M\log(z-ib), \quad M=-\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY),\\ &\psi(z)\approx N(z-ib)\log(z-ib)+Mib\log(z-ib),\\ &N=\frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY).\end{aligned}\right\} \quad (22.12)$$

于是用(22.2)定义的函数 $\chi(z)$ 也在 $z=ib$ 有奇点，其主部为

$$\chi(z)\approx N\log(z-ib)+M\cdot 2ib/(z-ib). \quad (22.13)$$

由于在实軸是自由边界，所以越过实軸的解析开拓可由(22.5)表示之。而奇点 $z=ib$ 的映象点 $z=-ib$ 是开拓区域中的奇点。在該点的主部是将(22.12)，(22.13)用于(22.5)而求得为

$$\varphi(z)=-\bar{\chi}(z)\approx-\bar{N}\log(z+ib)-\bar{M}(-2ib)/(z+ib), \quad (22.14)$$

$$\chi(z)=-\bar{\varphi}(z)\approx-\bar{M}\log(z+ib). \quad (22.15)$$

在此考虑如下函数：

$$\varphi_0(z)=\varphi(z)-\{M\log(z-ib)-\overline{N}\log(z+ib)-\overline{M}(-2ib)/(z+ib)\}, \qquad (22.16)$$

$$\chi_0(z)=\chi(z)-\{N\log(z-ib)+M\cdot 2ib/(z-ib)-\overline{M}\log(z+ib)\}, \qquad (22.17)$$

它們对于有限的 z 是正則的(在 $z=ib$ 及 $z=-ib$ 的奇性消失)，亦即它們是整函数。$z=\infty$ 可能是它們的奇点。但由于假設离开受力較远处应力为零，則在 $z=\infty$ 也不得有奇点。从而它們非为常数不可。这个常数可取为零(§9)。于是应力状态由

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=M\log(z-ib)-\overline{N}\log(z+ib)+\overline{M}\cdot 2ib/(z+ib),\\ \chi(z)&=N\log(z-ib)+M\cdot 2ib/(z-ib)-\overline{M}\log(z+ib)\end{aligned}\right\} \qquad (22.18)$$

可以計算出来。

[注]　Melan [ZAMM, **12** (1932), 343] 的解法和此处的解法很类似，但沒有解决到底。

§23　对于圓弧的反照

設以原点为中心的圓周 $|z|=a$ 的全体或其中一段弧 L 为彈性体的边界，在其上有

$$\bar{z}z=a^2, \quad \therefore \quad \bar{z}=a^2/z, \qquad (23.1)$$

因此，在这里取輔助函数为

$$\chi(z)=\frac{a^2}{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\text{ ❶}. \qquad (23.2)$$

与前节同理，可分別得到如下情况的解析开拓：

图　23.1

(1) 当 L 为自由边界时，有

$$\varphi(z)=-\overline{\chi}(a^2/z), \quad \chi(z)=-\overline{\varphi}(a^2/z). \qquad (23.3)$$

(2) 当 L 为固定边界时，有

$$\varphi(z)=\frac{1+\nu}{3-\nu}\overline{\chi}(a^2/z), \quad \chi(z)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\varphi}(a^2/z). \qquad (23.4)$$

---

❶ 在单連区域中函数 $\chi(z)$ 就不是解析的。——校者注

例 1 对具有自由圆孔的无限板，在离开孔較远处受有均匀应力的情形（§ 14，例 2）。

由題設知 $\varphi(z)$，$\psi'(z)$ 在 $z=\infty$ 处有一阶的极点，其主部为

$$\varphi(z) \approx Az, \quad \psi'(z) \approx 2Bz. \tag{23.5}$$

其中（§ 6，例 1）

$$A = \left[\frac{\sigma_x+\sigma_y}{4}\right]_{z=\infty}, \quad 2B = \left[\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}+i\tau_{xy}\right]_{z=\infty}. \tag{23.6}$$

因此函数 $\chi(z)$ 根据（23.2）在 $z=\infty$ 的主部为

$$\chi(z) \approx 2Bz. \tag{23.7}$$

于是在区域 $a<|z|<\infty$ 内 $\varphi(z)$ 及 $\chi(z)$ 无奇点。借此由（23.3）可越过圆周解析开拓到区域 $0<|z|<a$。因此 $z=0$ 为解析开拓的奇点，在該点的主部可由在 $z=\infty$ 的主部用（23.3）导出如下：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\bar{\chi}(a^2/z) \approx -2\bar{B}(a^2/z), \\ \chi(z) &= -\bar{\varphi}(a^2/z) \approx -\bar{A}(a^2/z). \end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

在此，将在 $z=\infty$ 的主部（23.5），（23.7）与在 $z=0$ 的主部两两相加，与前节同理，即得

$$\varphi(z) = Az-2\bar{B}a^2/z, \quad \chi(z) = 2Bz-\bar{A}a^2/z. \tag{23.9}$$

因此，应力状态及位移都可由此直接計算出来。

［注 1］ 为了作比較，由（23.9）求出 Airy 应力函数 $F(x, y)$：

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Re}\left[\bar{z}\left(Az-2\bar{B}\frac{a^2}{z}\right)+\left(Bz^2-2Aa^2\log z+\bar{B}\frac{a^4}{z^2}\right)\right] \\ &= A(r^2-2a^2\log r)+B'\left(r^2+2a^2+\frac{a^4}{r^2}\right)\cos 2\theta \\ &\quad -B''\left(r^2-2a^2+\frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned} \tag{23.10}$$

（但設 $z=re^{i\theta}$），这与用其他方法求的解完全一致。

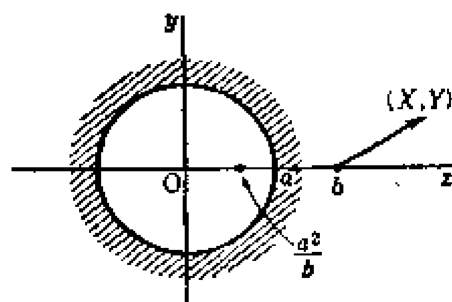


图 23.2

例 2 在具有自由圆孔的无限板内一点作用着集中力的情形。

設圆孔为 $|z|=a$，在点 b $(b>a)$ 作用着集中力 (X, Y)。复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在 $z=b$ 有奇点，和前节的例同理得其主部为

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &\approx M\log(z-b), \\ \psi(z) &\approx N(z-b)\log(z-b)-Mb\log(z-b), \end{aligned}\right\} \tag{23.11}$$

其中 M，N 和（22.12）具有同样意义。对于（23.2）的函数 $\chi(z)$ 在 $z=b$ 的主

部由(23.11)可知为

$$\chi(z)\approx N\log(z-b)-M\frac{b-a^2/b}{z-b}. \tag{23.12}$$

越过圆周到圆内解析开拓时，在 $z=a^2/b$ 出現奇点，在該点的主部由(23.11)，(23.12)用(23.3)可导出如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&\approx-\overline{N}\log\left(z-\frac{a^2}{b}\right)-\overline{M}\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\frac{a^2}{b^2}\Big/\left(z-\frac{a^2}{b}\right),\\ \chi(z)&\approx-\overline{M}\log\left(z-\frac{a^2}{b}\right).\end{aligned}\right\} \tag{23.13}$$

其次，假設在离开作用点較远处的应力等于零，而合力必須与(X, Y)平衡，所以在 $z=\infty$ 的主部是

$$\varphi(z)\approx M\log z,\quad \psi(z)\approx Nz\log z,\quad \therefore\ \chi(z)\approx N\log z. \tag{23.14}$$

于是在共映象点 $z=0$ 的主部是

$$\varphi(z)\approx\overline{N}\log z,\quad \chi(z)\approx\overline{M}\log z. \tag{23.15}$$

除上述以外，$\varphi(z)$，$\chi(z)$ 不能再有奇点。因此与前面例題同样推理，可得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)=&M\log(z-b)-\overline{N}\log\left(z-\frac{a^2}{b}\right)\\ &-\overline{M}\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\frac{a^2}{b^2}\Big/\left(z-\frac{a^2}{b}\right)+\overline{N}\log z,\\ \chi(z)=&N\log(z-b)-M\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\Big/\left(z-\frac{a^2}{b}\right)\\ &-\overline{M}\log\left(z-\frac{a^2}{b}\right)+\overline{M}\log z.\end{aligned}\right\} \tag{23.16}$$

由此可計算应力分布及位移。

§24 椭圆孔的情形

物理面上的椭圆

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1,\quad (a>b) \tag{24.1}$$

由映照函数

$$z=Z(\zeta)=\frac{c}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{24.2}$$

映照到 ζ 面上的圆：$|\zeta|=R\ (R>1)$。在此，椭圆的长半徑 a，短半徑 b 与参数 c 及 R 間有如下关系式：

$$
\left.\begin{aligned}
a&=\frac{c}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right), & b&=\frac{c}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right),\\
c&=\sqrt{a^2-b^2}, & R&=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.
\end{aligned}\right\}\tag{24.3}
$$

用这个映照函数，可将椭圆(24.1)的外部区域(D)一对一地映照到ζ面的区域$(\varDelta)$：$|\zeta|>R$。

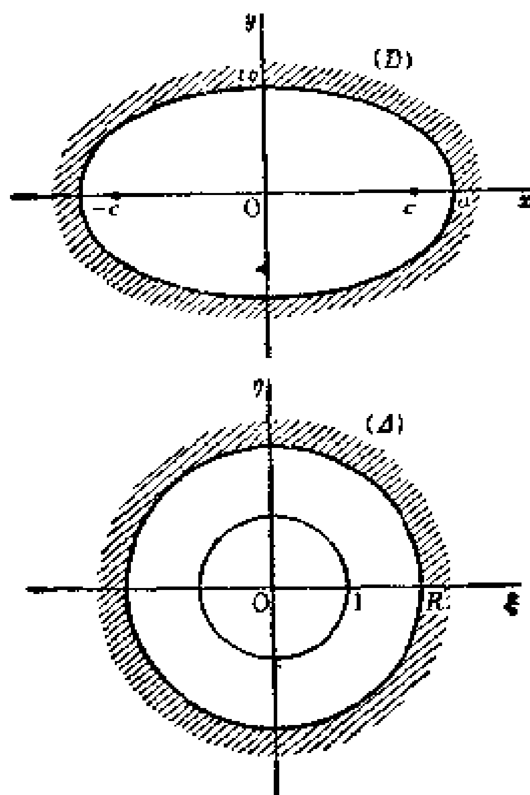


图 24.1

由§17知

$$u-iv=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\,\bar{\Phi}(\bar{\zeta})-\{\bar{Z}(\bar{\zeta})\cdot\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)+\Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)\}\right],\tag{24.4}$$

$$-P_y-iP_x=\bar{\Phi}(\bar{\zeta})+\{\bar{Z}(\bar{\zeta})\cdot\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)+\Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)\}.\tag{24.5}$$

特别当边界L是圆❶的弧时，在其上成立着

$$\bar{\zeta}=R^2/\zeta.\tag{24.6}$$

因此辅助函数$X(\zeta)$为

$$X(\zeta)=\bar{Z}(R^2/\zeta)\cdot\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta)+\Psi^{\mathrm{I}}(\zeta)\tag{24.7}$$

❶ 此处原书为："椭圆(24.1)"，有误。——校者注

则越过 L 的解析开拓可得如下:

(1) L 为自由边界时

$$\Phi(\zeta)=-\overline{X}(R^2/\zeta), \quad X(\zeta)=-\overline{\Phi}(R^2/\zeta). \tag{24.8}$$

(2) L 为固定边界时

$$\Phi(\zeta)=\frac{1+\nu}{3-\nu}\overline{X}(R^2/\zeta), \quad X(\zeta)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\Phi}(R^2/\zeta). \tag{24.9}$$

例 具有自由椭圆孔的无限板在較远处受有均匀应力的情形。

由較远处的条件,和前节例1同理得

$$\text{在 } z=\infty, \qquad \varphi(z)\approx Az, \quad \psi(z)\approx Bz^2, \tag{24.10}$$

其中 A, B 是和(23.6)相同的。

物理面上 $z=\infty$ 和 ζ 面上 $\zeta=\infty$ 相对应,所以在 ζ 面上有

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } \zeta=\infty, \qquad \Phi(\zeta)\approx A\cdot Z(\zeta)\approx A\frac{c}{2}\zeta, \quad \Phi^{\rm I}(\zeta)\approx A,\\ &\qquad\qquad \Psi^{\rm I}(\zeta)\approx 2B\cdot Z(\zeta)\approx Bc\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{24.11}$$

于是由(24.7)得

在 $\zeta=\infty$,

$$X(\zeta)\approx\frac{c}{2}\left(\frac{R^2}{\zeta}+\frac{\zeta}{R^2}\right)\Phi^{\rm I}(\zeta)+\Psi^{\rm I}(\zeta)\approx A\frac{c}{2R^2}\zeta+Bc\zeta. \tag{24.12}$$

$\Phi(\zeta)$ 及 $X(\zeta)$ 在区域 $|\zeta|>R$ 内除上述以外不能再有奇点。所以越过圆的周界解析开拓时,仅有 $\zeta=0$ 作为奇点出現。在該点的主部是

$$\Phi(\zeta)\approx-\left(A\frac{c}{2R^2}+\overline{B}c\right)\frac{R^2}{\zeta}, \quad X(\zeta)\approx-A\frac{c}{2}\frac{R^2}{\zeta}. \tag{24.13}$$

这样,就得到全 ζ 面上存在的仅有二个奇点的主部,将它們合并起来就得到

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta)&=A\frac{c}{2}\zeta-\left(A\frac{c}{2R^2}+\overline{B}c\right)\frac{R^2}{\zeta},\\ X(\zeta)&=\left(A\frac{c}{2R^2}+Bc\right)\zeta-A\frac{c}{2}\frac{R^2}{\zeta}.\end{aligned}\right\} \tag{24.14}$$

由此可算出应力及位移。

[注1] 这个問题虽可按 §18 的方式求解,但此处的解法却簡单得多。

[注2] 在固定边界的情形,用(24.9)代替(24.8)也可同样解出。N. Muschelisvili [ZAMM. 13 (1933), 264] 用另外一种方法将它解出,但用反服原理的方法却簡单得多。